

الصفحة

1

4

♦♦

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -

RS25

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵉⵜ
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵉⵜ
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵉⵜ



السلطة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice 1 se rapporte aux nombres complexes(3.5 pts)
- L'exercice 2 se rapporte au calcul des probabilités(3 pts)
- L'exercice 3 se rapporte aux structures algébriques(3.5 pts)
- L'exercice 4 se rapporte à l'analyse(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (3.5 points)

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

0.25 1-a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

0.5 b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_α)

0.5 2- Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points Ω , M_1 et M_2 d'affixes respectivement α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et

$$z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \text{ et soit } R \text{ la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}$$

0.5 1-a-Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0.25 b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.

0.25 2-a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 b- Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0.25 c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange .

0.5 3- Montrer que pour tout réel θ , le nombre : $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

EXERCICE2 : (3 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$). On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 1- Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 2- Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 3- On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Déterminer la loi de probabilité de X_n .

EXERCICE3 : (3.5 points)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2, +, \cdot)$.

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base de V_2 . On pose : $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$$

0.25 1-a- Montrer que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base de V_2

- 0.25 b-Vérifier que : $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$
- 0.25 c- Montrer que : $\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 \quad (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2$
- 0.25 2-a- Montrer que la loi $*$ est commutative.
- 0.25 b- Montrer que la loi $*$ est associative.
- 0.25 c- Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.
- 0.25 d- Montrer que $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.
- 3- Soit $\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\}$. On note : $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$
- 0.25 a- Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$
- 0.25 b- Montrer que $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, \cdot)$
- 0.5 c- Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $*$ \Leftrightarrow la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée
- 4- On suppose que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*) \quad ; \quad \vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$
On considère l'application $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow E_{\vec{u}}$
- $$x \mapsto \frac{x}{\alpha} \vec{u}$$
- 0.5 a- Montrer que φ est un isomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) vers $(E_{\vec{u}}, *)$
- 0.25 b- En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

EXERCICE4 : (10 points)

PARTIE I

On considère la fonction g définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

- 0.25 1- a- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$
- 0.5 b- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- 0.5 2- Montrer que g est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$
- 3- On donne le tableau de variations de g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	2			1	
		$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$			$-\infty$

- 0.5 a-Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha) = 0$
- 0.25 b- Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0.5 c- En déduire que : $(\forall x \in]-1, \alpha[) \quad 0 < g(x)$ et que : $(\forall x \in]\alpha, +\infty[) \quad g(x) < 0$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 1-a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2- a- Montrer que f est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0.5 b- Donner le sens de variation de f sur I

0.75 c- Vérifier que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0.25 3-a- Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0.5 b- Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$

0.25 c- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad f(x) < x$

1 d- Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

Partie III : On pose $J = \int_0^1 f(x) dx$

1 1- a- En utilisant le changement de variable : $t = \frac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$

0.5 b- Déterminer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la tangente (T) , la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$

1 2- En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x} dx$

FIN

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- عناصر الإجابة -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

RR25

4	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

EXERCICE1		Indication de solutions		Barème
I-	1-	a-	Vérification que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = \alpha^2$	0.25
		b-	Les solutions de (E_α) sont $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$	0.5
	2-	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = \alpha e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = \alpha e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})}$	0.5	
II-	1-	a-	$R(\Omega) = M_1$ et $R(M_1) = M_2$	0.25x2
		b-	Déduction.	0.25
	2-	a-	Vérification.	0.25
		b-	Orthogonalité de (ΩM_2) et (OM_1)	0.5
		c-	Déduction.	0.25
	3-	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - \alpha e^{i\theta}}{z_1 - \alpha e^{i\theta}} \in \mathbb{R}$	0.5	

EXERCICE2		Indication de solutions		Barème
1-	Soit A : " les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre "			1
	$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$			
2-	Soit B : " les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) "			1

	$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{C_n^3 (n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!}$	
3-	$X_n(\Omega) = \{3, \dots, n\}$ $\forall k \in X_n(\Omega) \quad P(X_n = k) = \frac{\text{Card}(X_n = k)}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 C_{k-1}^2 2A_{n-3}^{k-3} (n-k)!}{n!}$ $= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$	1

EXERCICE3		Indication de solutions	Barème
1-	a-	(\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base de V_2	0.25
	b-	Vérification.	0.25
	c-	$\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 \quad (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2$	0.25
2-	a-	La commutativité de la loi *	0.25
	b-	L'associativité de la loi *	0.25
	c-	$\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ est l'élément neutre pour la loi *	0.25
	d-	$(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.	0.25
3-	a-	$(E_u, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$	0.25
	b-	$(E_u, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, \cdot)$	0.25
	c-	Implication directe.....0.25 Implication réciproque.....0.25	0.5
4-	a-	φ est un homomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) vers $(E_u, *)$0.25 φ est une bijection de \mathbb{R}^* vers E_u0.25	0.5
	b-	$(E_u, +, *)$ est un corps commutatif	0.25

EXERCICE4		Indication de solutions	Barème
Partie I	1-	a- $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$	0.25
		b- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$	0.5
	2-	Dérivabilité de g sur I 0.25	0.5
		$(\forall x \in I) \quad g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$ 0.25	
	3-	a- Existence de α 0.25	0.5
		unicité de α 0.25	
		b- Vérification.	0.25
		c- $(\forall x \in]-1, \alpha[) \quad 0 < g(x)$ 0.25	0.5
	$(\forall x \in]\alpha, +\infty[) \quad g(x) < 0$ 0.25		
	Partie II	1-	a- Calcul de $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 0.25
Interprétation graphique du résultat 0.25			
b-		Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.25	0.5
		Interprétation graphique du résultat 0.25	
2-		a- Dérivabilité de f sur I 0.25	0.75
		$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ 0.5	
		b- Le sens de variation de f sur I	0.5
		c- Vérification : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ 0.5	0.75
$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ 0.25			
3-		a- L'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0	0.25
	b- $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$	0.5	

	c-	Déduction : $(\forall x > 0) f(x) < x$	0.25
	d-	La représentation graphique de (T)0.25 La représentation graphique de (C)0.75	1
Partie III	a-	Changement de variable : $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$	1
	1- b-	$A = \left(\int_0^1 f(x) - x dx\right) \times u.a = \left(\int_0^1 (x - f(x)) dx\right) \times 4cm^2$ $= \left(2 - \frac{\pi \ln 2}{2}\right) cm^2$	0.5
	2-	Par intégration par parties, on obtient : $K = \frac{\pi \ln 2}{8}$	1