



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
عناصر الإجابة



الصفحة
1
3

9	المعامل	NR24	الرياضيات	المادة
4	مادة الإفجان		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك

عناصر الإجابة وسلم التقيط

التمرين الأول	4 نقط
الجزء الأول: 1-	البرهان بالترجع 0.5ن
2-	$A^{-1} = A$ 0.5ن
الجزء الثاني: 1- (أ)	* قانون تركيب داخلي 0.5ن
(ب)	تبادلية القانون * 0.25ن تجميعية القانون * 0.25ن
(ج)	العنصر المحايد : $e = a + 1$ 0.5ن
2-	مماثل x هو : $x' = a + \frac{1}{x-a}$ 0.25ن $(I, *)$ زمرة تبادلية 0.25ن
3- (أ)	φ تقابل 0.25ن φ تشاكل 0.25ن
(ب)	حل المعادلة هو : $x = 2a$ إذا كان $a \geq 0$ و المعادلة لا تقبل حلا إذا كان $a < 0$ 0.5ن

التمرين الثاني	2.5 نقطة
1-	قابلية قسمة العدد N على 11 0.25ن
2- (أ)	التحقق من أن 2011 عدد أولي 0.5ن التحقق من أن $10^{2010} - 1 = 9N$ 0.25ن
(ب)	حسب ميرهنة فيرما : 2011 يقسم العدد $10^{2010} - 1$ 0.5ن
(ج)	الإستنتاج باستعمال ميرهنة كوص 0.5ن
3-	نلاحظ أن : $22121 = 11 \times 2011$ وأن 2011 و 11 عددين أوليين فيما بينها 0.5ن
التمرين الثالث	3.5 نقطة
الجزء الأول: 1-	التحقق 0.5ن
2- (أ)	التكافؤ 0.5ن
(ب)	قيمتي m هما : $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ 1ن
الجزء الثاني: 1- (أ)	 0.25ن
(ب)	$z'' - (1+i) = i(z - (1+i))$ 0.25ن

(أ-2)	$\frac{z'' - 2}{z' - 2} = -i$ 0.25..... ن متساوي الساقين و قائم الزاوية في A 0.25 ن
(ب)	(تمنح النقطة كاملة حتى ولو لم يتطرق المترشح للحالات الخاصة) المستقيم الذي معادلته: $x = 1$ 0.5 ن

التمرين الرابع	6.5 نقطة
الجزء الأول	
-1	$e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$ 0.25..... ن
-2	قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 0.5 ن
-3	لكل نهاية من النهايات الأربعة 0.25 ن لكل تأويل من التأويلين 0.25 ن
-4	حساب $f'(x)$ 0.25 ن تغيرات f 0.25 ن جدول تغيرات f 0.25 ن
-5	زوج إحداثيتي نقطة الانعطاف 0.5 ن $\left(e^2; \frac{e^2}{2} \right)$
-6	إنشاء المنحنى 0.5 ن
-7	وجود و وحدانية a_n و $1 < a_n$ 0.25 ن وجود و وحدانية b_n و $b_n > e$ 0.25 ن
الجزء الثاني	
-1	$(\forall n \geq 3) b_n \geq n$ 0.25 ن $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ 0.25 ن
(أ-2)	المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية 0.25 ن استنتاج تقارب $(a_n)_{n \geq 3}$ 0.25 ن
(ب)	تأطير $\ln(a_n)$ 0.25 ن استنتاج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ 0.25 ن
(ج)	استنتاج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$ 0.5 ن

التمرين الخامس	3.5 نقطة
(أ-1)	تأطير $F(x)$ 0.5
(ب)	$e^{-x^2} \leq e^{-x} (\forall x \geq 1)$ 0.25 استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 0.25
-2	قابلية اشتقاق الدالة F 0.25 حساب $F'(x)$ 0.25
(أ-3)	اتصال الدالة G على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ 0.25 تقبل جميع الحلول الصحيحة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ إذن أو من أجل $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ لدينا: $0 \leq G(x) = F(\tan x) \leq \tan(x)e^{-\tan x}$ إذن أو أية طريقة صحيحة أخرى
(ب)	- تطبيق مبرهنة رول : وجود $c_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ بحيث $G'(c_1) = (1 + \tan^2(c_1))F'(\tan c_1) = 0$ 0.25 - وجود $c \in]0, +\infty[$ بحيث $F'(c) = 0$ ($c = \tan c_1$) 0.25 - $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$ 0.25
(أ-4)	الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $H'(x) = -\left(2 + \frac{1}{2x^2}\right)e^{-x^2} < 0$ 0.5
(ب)	الدالة H تقابل (متصلة و رتيبة قطعا) و $H(c) = 0$ ومنه وحدانية العدد c 0.25 جدول تغيرات الدالة F 0.25

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إن: $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إن: $-1 < -y < 0$ و $-1 < -x < 0$

إن: $0 < 1 - y < 1$ و $0 < 1 - x < 1$

و منه: $(1) \quad 0 < (1 - x)(1 - y) < 1$

و بما أن $xy > 0$ فإن: $(1 - x)(1 - y) + xy > xy$

(2) يعني: $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} < 1$

و لدينا: $xy > 0$ و $xy + (1 - x)(1 - y) > 0$

(3) إن: $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} > 0$

من (2) و (3) نستنتج أن:

$$(\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; x * y \in I$$

إن: * قانون تركيب داخلي في I .

ليكن x و y عنصرين من I

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } x * y &= \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} \\ &= \frac{yx}{yx + (1 - y)(1 - x)} \\ &= y * x \end{aligned}$$

إن: * قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } x * (y * z) &= \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1 - x)(1 - (y * z))} \\ &= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x * y) * z$ نحصل على:

$$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} = x * (y * z)$$

و بالتالي: * قانون تجميعي في I .

ليكن e العنصر المحايد للقانون * في I .

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{xe}{xe + (1 - x)(1 - e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على:

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{e}{xe + (1 - x)(1 - e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; e = \frac{1}{2} \in]0,1[$$

إن القانون * يقبل عنصرا محايدا في I و هو: $\frac{1}{2}$.

حصلنا لحد الآن على ما يلي:

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- * قانون تركيب داخلي في I .
- * يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- * تبادلي و تجميعي في I .

إن: لكي تكون $(I, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن:

كل عنصر x يقبل مائلا بالقانون * في المجموعة I .

ليكن x' مائل x في المجموعة I بالنسبة للقانون *

$$\text{إن: } x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1 - x)(1 - x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x' = (1 - x)$$

بما أن: $x \in I$ فإن $1 - x > 0$

إن: $1 - x > 0$

و منه $(1 - x)$ هو مائل x بالنسبة لـ * في I .

و بالتالي: $(I, *)$ زمرة تبادلية.

لدينا $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

إن: H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن: $2^n \in \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

ليكن 2^m و 2^n عنصرين من H



لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H, \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

■ 3 ب

ليكن x و y عنصرين من H .

$$\begin{aligned} \varphi(x) * \varphi(y) &= \left(\frac{1}{1+x} \right) * \left(\frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y) + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \\ &= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$.

■ 3 ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H, \times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ حسب السؤال 3 ا

إذن $(\varphi(H), \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$

و بالتالي : $(K, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 ا

$$10^x \equiv 2[19] \quad \text{لدينا}$$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

$$10^{x+1} \equiv 1[19] \quad \text{إذن}$$

■ 1 ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة (Fermat) :

$$(\forall a \wedge 19 = 1) ; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

$$10^{18} \equiv 1[19] \quad \text{أي}$$

■ 2 ا

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب (Bezout) :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

$$(1) \quad 10^{(x+1)v} \equiv 1[19] \quad \text{يعني}$$

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

$$(2) \quad 10^{18u} \equiv 1[19] \quad \text{يعني}$$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

$$10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19] \quad \text{يعني}$$

$$10^d \equiv 1[19] \quad \text{و بالتالي}$$

■ 2 ب

$$d = 18 \wedge (x+1) \quad \text{لدينا}$$

$$d \setminus 18 \quad \text{إذن}$$

و منه : $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases} \quad \text{و لدينا}$$

$$d = 18 \quad \text{و بالتالي}$$

■ 2 ج

$$18 = 18 \wedge (x+1) \quad \text{لدينا}$$

$$18 / (x+1) \quad \text{إذن}$$

$$18 / (-18) \quad \text{و بما أن}$$

$$18 / (x+1) - 18 \quad \text{فإن}$$

$$18 / (x-17) \quad \text{أي}$$

$$x \equiv 17[18] \quad \text{و منه}$$



1 ■

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

2 ■

ننشر التعبير : $(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ نحصل على :

$$(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1 + 4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

3 ■

ليكن $(x + iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5 - 12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ |x + iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5 - 12i$ هما : $(3 - 2i)$ و $(-3 + 2i)$

3 ■

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i) = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

إذن : $z_1 = -1 + 3i$ و $z_2 = 2 + i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-1 + 3i \text{ و } 2 + i \text{ و } -2i$$

1 ■

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{-1 + 3i - 2 - i}{-2i - 2 - i} = \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

و منه :

$$(1) \quad \left(\overline{CB}, \overline{CA} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\left| \frac{a - c}{b - c} \right| = |-i| = 1 \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad \frac{CA}{CB} = 1 \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

2 ■

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

$$\mathcal{R}_1(M) = M_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \\ \Leftrightarrow (z_1 + 2i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)(z + 2i) \\ \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)z - \sqrt{3} - i \end{cases}$$

2 ■

$$\mathcal{R}_2(M) = M_2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_2 - a) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(z - a) \\ \Leftrightarrow (z_2 + 1 - 3i) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)(z + 1 - 3i) \\ \Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)z - (1 - 3i) \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

2 ■

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\begin{cases} \Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1 - 3i)(3 + i\sqrt{3})}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = \text{constante complexe} \end{cases}$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : I نقطة ثابتة في المستوى.



1 ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

2 (i) ■

ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

إن f دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2 (b) ■

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

إن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

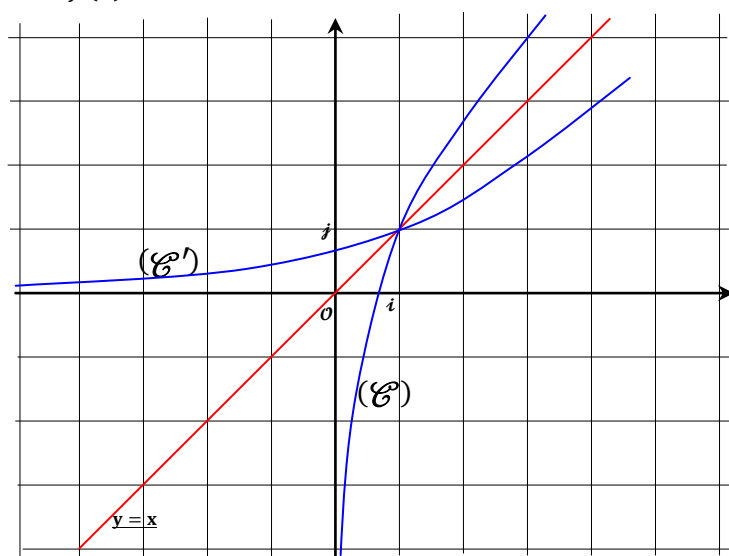
و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}		$+\infty$
	0	

3 ■

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3,72$$



4 (i) ■

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \quad \text{لنحسب التكامل :}$$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{و منه :}$$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt$$

$$= [t f(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9$$

4 (b) ■

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2} \right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$



لدينا دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على $]0,1[$.

ولدينا : $\forall x \in]0,1[; f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$

إذن : دالة f_n تزايدية قطعاً على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقاً واحداً α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists ! \alpha_n \in]0,1[; f_n(\alpha_n) = 0$

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \in]0,1[; f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعاً على $]0,1[$ فإن : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

إذن $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية تناقصية قطعاً.

ولدينا : $0 < \alpha_n < 1$; $(\forall n \geq 2)$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ مصغرة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متتالية متقاربة .

لدينا $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

$$-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{إذن :}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha_n} \geq \frac{1}{1 - t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{t^n}{1 - \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(1 - \alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

$$\left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي :

$$(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right)$$





لدينا :

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right)}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \right)}_{+\infty}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 0 0

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt = 0$$

و منه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(1 - \alpha_n)) = 0$$

نضع :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

إذن :

$$1 + \ln(1 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - \ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ell} = e$$

$$\Leftrightarrow e(1 - \ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{e - 1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-1}$$

و الحمد لله رب العالمين ■

