

NS 24

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبية أو المسلط

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
  - يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
  - يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلّق بالحسابيات ..... (3ن)
  - التمرين الثاني يتعلّق بالبنية الجبرية ..... (3.5ن)
  - التمرين الثالث يتعلّق بالأعداد العقدية ..... (3.5ن)
  - التمرين الرابع يتعلّق بالتحليل ..... (8ن)
  - التمرين الخامس يتعلّق بالتحليل ..... (2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيما كان نوعها

## لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

### التمرين الأول:(3 نقط)

<p>لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N}</math> نضع : <math>a_n = \underbrace{333\dots\dots\dots 31}_n</math> مرتة الرقم 3 ) <math>n</math> مرة</p> <p>1- تتحقق أن العددين <math>a_1</math> و <math>a_2</math> أوليان.</p> <p>2- بين أن لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N}</math> :</p> $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ <p>3- بين أن لكل <math>k</math> من <math>\mathbb{N}</math> :</p> $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$ <p>4- بين أن لكل <math>k</math> من <math>\mathbb{N}</math> ، ثم استنتاج أن 31 يقسم <math>3a_{30k+1}</math> :</p> $a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$ <p>5- بين أنه لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N}</math> ، إذا كان <math>a_n x + 31y = 1</math> فإن المعادلة لا تقبل حلولا في <math>\mathbb{Z}^2</math></p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.75</p> <p>0.75</p> <p>0.5</p>
--	--

### **التمرين الثاني:(3.5 نقطة)**

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ نذكر أن $(\square, +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\square), +, \times)$ حلقة واحدية صفرها	
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و وحدتها	
$E = \left\{ M(a,b) / (a,b) \in \square^2 \right\}$ ونعتبر المجموعة : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ لكل $a$ و $b$ من ، نضع:	0.5
1- بين أن $E$ زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\square), +)$ .	0.5
2- احسب $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ حيث: $J^2 = J'$ ثم استنتج أن $E$ جزء غير مستقر من $(M_2(\square), \times)$	0.75
3- نعرف على $(M_2(\square), *)$ قانون التركيب الداخلي * بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث:	
ونعتبر التطبيق $\varphi$ من $(\square, *)$ نحو $(M_2(\square), +)$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ ( $a$ و $b$ عدوان حقيقيان ) بالصفوفة $M(a,b)$ .	
أ) بين أن $\varphi$ تشكل من $(\square, *, +)$ نحو $(M_2(\square), *)$ .	0.5
ب) نضع: $\varphi(\square^*) = E^*$ . بين أن: $E^* = E - \{O\}$ .	0.25
ج) بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية.	0.5
4- بين أن: $(\forall (A,B,C) \in E^3) \quad A * (B + C) = A * B + A * C$	0.5
5- استنتاج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي.	0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم معتمد منظم و مباشر .  $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا بحيث:  $q = \frac{\theta}{2}$ ,  $\frac{p}{4} \leq q < \frac{p+1}{4}$

1- نعتبر في المجموعة □ المعادلة التالية:  $(E) z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

أ) تتحقق أن مميز المعادلة (E) هو:  $D = (\sqrt{2}ie^{iq})^2$

ب) اكتب على الشكل المثلثي  $z_1$  و  $z_2$  حل المعادلة (E) في المجموعة □.

0.25

0.75

2- نعتبر النقط  $I$  و  $J$  و  $T_1$  و  $T_2$  و  $A$  التي ألاقها على التوالي 1 و 1 - و  $e^{iq}$  و  $e^{i(q+\frac{p}{4})}$  و  $e^{i(q+\frac{p+1}{4})}$ .

أ) بين أن المستقيمين  $(OA)$  و  $(T_1T_2)$  متعمدان .

0.5

ب) ليكن  $K$  منتصف القطعة  $[T_1T_2]$  . بين أن النقط  $O$  و  $K$  و  $A$  مستقيمية.

0.25

ج) استنتج أن المستقيم  $(OA)$  هو واسط القطعة  $[T_1T_2]$  .

0.25

3- ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $T_1$  و قياس زاويته  $\frac{p}{2}$

أ) اعط الصيغة العقدية للدوران  $r$  .

0.25

ب) تتحقق أن لحق النقطة  $B$  صورة النقطة  $I$  بالدوران  $r$  هو:  $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$

0.5

ج) بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(IJ)$  متعمدان .

0.25

4- حدد لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة التي متوجهها  $(-v)$

0.25

5- بين أن النقطة  $A$  هي منتصف القطعة  $[BC]$  .

0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty)$  بما يلي:  

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2}; x > 0$$
  

$$f(0) = 0$$

1- أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على المجال  $[0, +\infty)$

0.5

ب) أدرس إشارة  $f(x)$  على المجال  $[0, +\infty)$

0.25

2- أ) بين أن:  $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+\right) f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

0.25

ب) بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتاقاق على المجال  $[0, +\infty)$

0.25

ج) بين أن:  $(\exists \alpha \in ]0,1[) \quad f'(\alpha) = 0$

0.5

د) استنتج أن:  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

0.5

- نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty]$  بما يلي: II  

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ليكن  $(C)$  المنحني الممثل للدالة  $F$  في معلم متعمد منظم.

1- أ) تحقق أن:  $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

0.5

ب) بين أن:  $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2$

1

$(F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt)$  (لاحظ أن:

ج) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

1

2- أ) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty]$  ثم أحسب  $F'(x)$

0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $[0, +\infty]$

0.25

1- أ) بين أن:  $(\forall t \in ]0, +\infty[) \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

0.5

ب) بين أن:  $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$

0.25

ج) استنتاج أن:  $x < F(x) < x$

0.25

2- نعتبر المتالية العددية  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  المعرفة بما يلي:  $u_0$  و  $u_1$  خواصها  $u_{n+1} = F(u_n)$

أ) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in ]0, 1[$

0.5

ب) بين أن المتالية  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  تناقصية قطعا ثم استنتاج أنها متقاربة.

0.5

ج) حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.5

التمرين الخامس: 2 نقط

$\frac{1}{x^2} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0$  نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $[0, +\infty]$  بما يلي:  
 $g(0) = 0$

1- بين أن الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[0, +\infty]$  0.5

2- لكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0, +\infty]$  ، نضع  $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$  أ) بين أن الدالة  $L$  متصلة على المجال  $[0, +\infty]$  0.25

ب) أحسب  $L(x)$  من أجل  $x > 0$  0.25

ج) أحسب  $L(0)$  ثم استنتج قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$  0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  أكبر من أو يساوي 1 نضع:  
 $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$  بين أن المتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  مقربة ثم حد نهايتها. 0.5

انتهى

**التمرين الأول**

$$n \in \mathbb{N}^*; a_n = \underbrace{333\dots31}_{n\times}$$

(1) لتحقق من أن  $a_1$  و  $a_2$  أوليانلدينا  $a_1 = 31$  و  $31$  عدد أوليلدينا  $a_2 = 331$  لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي ( 2 - 11 - 7 - 5 - 3 - 2 ) و 17

إذن 331 عدد أولي

 $a_1$  و  $a_2$  عداد أوليان(2) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^n = 1 + 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n = 1 + \frac{10^{n+1} - 10}{3} = \frac{10^{n+1} - 7}{3} \quad \text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 10 + 10^2 + \dots + 10^n = 10 \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^{n+1} - 10}{9}$$

و منه  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

(3) لنبين أن  $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7[31]$ لدينا حسب (2)  $10^2 \equiv 7[31]$  إذن  $10^2 - 7 = 3 \times 31$ و لدينا  $10^2 \equiv 7[31] \Rightarrow 10^3 \equiv 70 \equiv 8[31] \Rightarrow 10^6 \equiv 64 \equiv 2[31] \Rightarrow 10^{30} \equiv 32 \equiv 1[31] \Rightarrow 10^{30k} \equiv 1[31]$ 

$$\begin{cases} 10^2 \equiv 7[31] \\ 10^{30k} \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

$(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

(4) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$  ثم لنتستنتج أن 31 يقسم  $a_{30k+1}$ لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$  إذن  $30k+1 \in \mathbb{N}^*$  ، حسب (3)  $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$ 

$$3a_{30k+1} \equiv 0[31] \quad \text{و منه } 3a_{30k+1} + 7 \equiv 7[31]$$

و بما أن  $31 \wedge 3 = 1$  فإن حسب مبرهنة كوص 31 يقسم  $3a_{30k+1}$  و

$a_{30k+1} \text{ يقسم } 31 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$

(5) لنبين أن المعادلة  $a_n x + 31y = 1$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{Z}^2$ 

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \equiv 1[30] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* ; n = 30k + 1$$

و منه حسب السؤال (4)  $31 \wedge 3 = 1$  أي أن  $a_n \equiv 1 \pmod{31}$  وهذا يعني أن المعادلة  $a_n x + 31y = 1$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{Z}^2$ (الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في  $\mathbb{Z}^2$  هو  $1 \wedge 31 = 1$ )

$\text{المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$

**التمرين الثاني**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \text{ و } E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_2(\mathbb{R}), +)$ 

$$\bullet I = M(1,0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$$

$$\bullet (\forall (M(a,b), M(c,d)) \in E^2); M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix} = M(a-c, b-d) \in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$$(M_2(\mathbb{R}), +) \text{ زمرة جزئية للزمرة } E$$

$$: \forall ((a,b), (c,d)) \in E^2; M(a,b) - M(c,d) \in E \quad \text{إذن} \quad 1+0 \neq 2 \quad \text{و} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا} \quad (2)$$

$$(M_2(\mathbb{R}), \times) \text{ جزء غير مستقر من } E$$

(3) لنبين أن  $\varphi$  تشكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(M_2(\mathbb{R}), *)$  نحو

لدينا

$$\left( \forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})^2; \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(ac-bd + i(ad+bc)) = M(ac-bd, ad+bc) \right) \quad \text{و لدينا}$$

$$\varphi(a+bi) * \varphi(c+di) = M(a,b) * M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad \end{pmatrix} = M(ac-bd, ad+bc)$$

$$\left( \forall ((a,b), (c,d)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(a+bi) * \varphi(c+di) \right) \quad \text{إذن}$$

و منه

$$(M_2(\mathbb{R}), *) \text{ نحو } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } \varphi \text{ تشكل من }$$

ب) لنبين أن  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$  حيثلدينا:  $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a+bi \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(a+bi) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$ إذن  $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$  و منه

$$\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$$

ج) لنبين أن  $(E^*, *)$  زمرة تبادليةلدينا  $\varphi(\mathbb{C}^*)$  زمرة تبادلية و  $\varphi$  تشكل من  $(M_2(\mathbb{R}), *)$  نحو  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو

نستنتج أن

$$\boxed{\text{زمرة تبادلية } (E^*, *)}$$

(4) لدينا إذن  $\boxed{(\forall (A, B, C) \in E^3), A * (B + C) = A * B + A * C}$

(5) نستنتج مما سبق أن  $(E, +, *)$  جسم تبادلي.  
لدينا حسب (1) زمرة وحدتها  $O$  و لدينا حسب (3)  $(E^*, *, *)$  زمرة تبادلية كما لدينا حسب (4) القانون \* توزيعي على القانون +  
نستنتج أن

$$\boxed{\text{جسم تبادلي } (E, +, *)}$$

### التمرين الثالث

(1) لتحقق من أن مميز المعادلة  $(E)$  هو  $\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$   
لدينا:  $\Delta = (\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} = 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$  إذن  $(E): z^2 - \sqrt{2}ie^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$   
و منه

$$\boxed{\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2}$$

ب) لنكتب الحلول  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل المثلثي

بما أن  $\Delta \neq 0$  فإن للمعادلة  $(E)$  حلول مختلفين هما:  
 $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, -\frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta - \frac{\pi}{4}\right]$   
 و منه  $z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta + \frac{\pi}{4}\right]$   
 $\boxed{z_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} - \theta\right] \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{\pi}{4} + \theta\right]}$

(2) لنبين أن المستقيمين  $(OA)$  و  $(T_1T_2)$  متعامدان :

$\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$  ،  $\overrightarrow{(OA, T_1T_2)} \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overrightarrow{T_1T_2})}{\text{aff}(OA)} \right) \equiv (2\pi)$  لدينا  
 إذن أي أن  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{T_1T_2}$  و منه  $\boxed{\overrightarrow{(OA, T_1T_2)} \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)}$

$$\boxed{\text{المستقيمين } (OA) \text{ و } (T_1T_2) \text{ متعامدان}}$$

ب) لنبين أن النقط  $O, A$  و  $K$  مستقيمية

$\text{aff}(\overrightarrow{OK}) = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$  ،  $\overrightarrow{(OA, OK)} \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overrightarrow{OK})}{\text{aff}(OA)} \right) (2\pi)$  لدينا  
 إذن أي أن المتجهتين  $\overrightarrow{OK}$  و  $\overrightarrow{OA}$  مستقيمتين و منه  $\boxed{\overrightarrow{(OA, OK)} \equiv 0(2\pi)}$

$$\boxed{\text{النقط } O \text{ و } A \text{ و } K \text{ مستقيمية}}$$

ج) لنتنجز أن المستقيم  $(OA)$  هو واسط القطعة  $[T_1T_2]$

لدينا  $(OA)$  عمودي على  $(T_1T_2)$  ولدينا  $K$  منتصف القطعة و نستنتج أن

$[T_1T_2]$  هو واسط القطعة  $(OA)$

أ) الصيغة العقدية للدوران  $r$  (3)

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta} \quad z' = iz + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)} \quad \text{يكافى} \quad z' - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\frac{i\pi}{2}} \left( z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \right) \quad \text{لدينا} \\ \text{الصيغة العقدية للدوران } r \text{ هي}$$

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

ب) لتحقق من أن لحق النقطة  $B$  صورة النقطة  $I$  بالدوران  $r$  هو  $b = i \times 1 + \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$  لديه

$$b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$$

$$\frac{b - \sqrt{2}e^{i\theta}}{-2} = \frac{-i}{2} = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \right] \text{ و } (\overline{IJ}, \overline{AB}) \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{IJ})} \right) (2\pi) \quad \text{لدينا}$$

$$\text{إذن } \overline{(\overline{IJ}, \overline{AB})} \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

المستقيمين  $(AB)$  و  $(IJ)$  متعامدين

$$t_{-\vec{v}}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow z_C - \sqrt{2}e^{i\theta} = -i \Leftrightarrow z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta} \quad (4) \quad \text{لدينا}$$

و منه لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة ذات المتجهة  $\vec{v}$  هو

$$z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

$$\frac{z_C + z_B}{2} = \frac{-i + \sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2}e^{i\theta} = z_A \quad \text{لدينا}$$

إذن

$[BC]$  هي منتصف القطعة  $A$

#### التمرين الرابع

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{الدالة المعرفة على } [0, +\infty[ \text{ كما يلي: } (I)$$

1) الدالة  $\ln$  متصلة على  $[0, +\infty[$  و الدالة  $\frac{-x}{1+x^2}$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (دالة جذرية معرفة على  $\mathbb{R}$ ) و بالخصوص على  $[0, +\infty[$  إذن الدالة  $f$  متصلة على  $[0, +\infty[$  (جداء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال  $f$  على اليمين في  $0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = 0 = f(0)$ : إذن  $f$  متصلة على يمين  $0$

$f$  متصلة على  $[0, +\infty]$  و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

متصلة على المجال  $[0, +\infty]$

(ب) لندرس إشارة  $f$  على المجال  $[0, +\infty]$

لدينا  $f(0) = 0$  ولكل  $x > 0$  إشارة  $f(x)$  هي عكس إشارة  $\ln x$  ومنه جدول إشارة  $f(x)$  كما يلي:

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$f(x)$	0	+	0

(أ) لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

ومنه

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

(ب) لنبين أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty]$

الدالة  $\ln$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty)$  و الدالة  $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  وبالخصوص على  $[0, +\infty]$

إذن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty)$  (كجاء دالتين قابلتين للإشتقاق على هذا المجال)

(ج) لنبين أنه يوجد  $\alpha$  من المجال  $[0, 1]$  يحقق  $f'(\alpha) = 0$

الدالة  $f$  متصلة على المجال  $[0, 1]$  و قابلة للإشتقاق على المجال  $[0, 1]$  إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر  $\alpha$

من المجال  $[0, 1]$  يتحقق  $f'(\alpha) = 0$  إذن

$(\exists \alpha \in [0, 1]); f'(\alpha) = 0$

(د) لنتستنتج أن  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

بما أن  $\alpha \in [0, 1]$  فإن  $\frac{1}{\alpha} \in ]1, +\infty]$  إذن  $f$  قابلة للإشتقاق عند  $\frac{1}{\alpha}$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$  نستنتج أن  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$  (أ) ولدينا حسب (2)

$f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} f'(\alpha) = 0$  إذن  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) \times \frac{1}{x^2}$  و منه

و منه

$$f' \left( \frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

$F$  دالة معرفة على المجال  $[0, +\infty]$  ب:  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  و  $(C)$  مبيانها في معلم متعمد منظم.

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad (1)$$

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; 0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq 1+t^2 \leq 2t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

لدينا

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

$$(\forall x \in [1, +\infty]) , F(1) - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2$$

انطلاقاً من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزمات المتالية:

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \left( \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \right) \stackrel{\left( \frac{\ln t > 0}{t} \right)}{\Rightarrow} \left( \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t} \right) \stackrel{(x \geq 1)}{\Rightarrow} \left( \int_1^x \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \right)$$

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; -\frac{(\ln x)^2}{2} \leq -\int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq -\frac{(\ln x)^2}{4}$$

فإن  $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[ \frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$

و حيث أن وبعد إضافة  $F(1)$  إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بلاحظة أن  $F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = F(x)$  نحصل على المطلوب:

$$(\forall x \in [1, +\infty]) , F(1) - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2$$

ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين

(أ) حساب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty]) , F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty]) , \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

خلاصة

$$\text{يقبل فرعاً شلجمياً في إتجاه محور الأفاسيل بجوار } +\infty$$

(2) أ) قابلية اشتقاق الدالة  $F$  على المجال  $[0, +\infty]$  و حساب  $F'$ 

بما أن  $f$  متصلة على المجال  $[0, +\infty]$  فإن  $F$  هي أصليتها التي تنعدم عند 0 و منه  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty]$  ولدينا

$$(\forall x \in [0, +\infty]; F'(x) = f(x))$$

**( $\forall x \in [0, +\infty]; F'(x) = f(x)$ ) قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty]$  ولدينا  $F$**

ب) نعلم حسب (1) أ) من الجزء الأول أن  $0 < f(x) < 0$  على المجال  $[0, 1]$  على المجال  $[1, +\infty]$  إذن جدول تغيرات الدالة  $F$  كما يلي

$x$	0	1	$+\infty$
$F(x)$	0	$F(1)$	$-\infty$

$(\forall t \in [0, +\infty]; -t \ln t \leq \frac{1}{e})$  (III)

نضع  $(\forall t \in [0, +\infty]; \varphi(t) = 1 + e \cdot t \ln t)$

$(\forall t \in [0, +\infty]; \varphi'(t) = e \cdot (\ln t + 1))$  و  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 1$  و  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  كما يلي

$x$	0	$1/e$	$+\infty$
$\varphi(x)$	1	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  نستنتج أن  $\varphi(t) \geq 0$

$$(\forall t \in [0, +\infty]; -t \ln t \leq \frac{1}{e})$$

ب) لنبين أن:  $(\forall t \in [0, +\infty]; f(t) \leq \frac{1}{e})$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < -t \ln t \leq \frac{1}{e} \\ \frac{1}{1+t^2} < 1 \end{array} \Rightarrow \frac{-t \ln t}{1+t^2} < \frac{1}{e} \Rightarrow f(t) < \frac{1}{e} \right.$$

إذا كان  $t \geq 1$  فإن  $\left( \frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq 0 < \frac{1}{e} \right)$  وإذا كان  $0 < t < 1$  فإن

ومن أجل  $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$ :  $t = 0$  نستنتج أن

$$(\forall t \in [0, +\infty]; f(t) < \frac{1}{e})$$

(ج) استنتاج أن  $\forall x \in ]0, +\infty[; F(x) < x$ 

$$\left( \forall t \in [0, +\infty[; f(t) < \frac{1}{e} \Rightarrow (\forall x > 0); \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt \right)$$

لدينا

$$\int_0^x \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} [t]_0^x = \frac{x}{e} < x$$

و لدينا

$$\boxed{(\forall x \in ]0, +\infty[; F(x) < x)}$$

(2)

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ ((\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n)) \end{cases} \text{ متالية معرفة بـ } (u_n)$$

(أ) لنبين أن  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in ]0, 1[$ برهان بالترجع : لدينا  $u_0 \in ]0, 1[$  إذن العلاقة صحيحة من أجل  $n = 0$ ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  نفترض أن  $u_n \in ]0, 1[$ بما أن  $F$  تزايدية قطعا على المجال  $]0, 1[$  فإن  $0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < F(u_n) < F(1) < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$  إذن  $u_{n+1} \in ]0, 1[$ . نستنتج (حسب مبدأ الترجع ) أن

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0, 1[}$$

(ب) لنبين أن المتالية تنقصية قطعا ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) < u_n$  فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0, 1[$  حسب III (ج)و منه  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$ إذن المتالية  $(u_n)$  تنقصية قطعا $(u_n)$  متقاربة و مصغررة بـ 0 إذن متقاربة

$$\boxed{(u_n) \text{ متقاربة}}$$

(ج) لنحسب نهاية المتالية  $(u_n)$ نضع  $I = ]0, 1[$  الدالة  $F$  متصلة على  $I$  و لدينا  $F(I) = ]0, F(1)[ \subset \left]0, \frac{1}{e}\right[ \subset I$ 

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ ((\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n)) \xrightarrow{(u_n) \text{ converge}} \lim u_n = l \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(l) = l \\ l \in I \cup \{0\} \end{cases}$$

إذن

لتحل في  $I \cup \{0\}$  المعادلة  $F(l) = l$ نعلم أن  $x < F(x)$  إذن المعادلة ليس لها حل في  $I$  وبالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\boxed{\lim u_n = 0}$$

التمرين الخامس

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

الدالة المعرفة على  $[0, +\infty]$  بمالي

(1) نبين أن الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty]$

الدالتيان  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  و  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  متصلتان على  $[0, +\infty]$  و الدالة  $\exp$  متصلة على  $\mathbb{R}$  إذن الدالة  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  متصلة على  $[0, +\infty]$

و بالتالي الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  متصلة على  $[0, +\infty]$  يعني الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty]$

لندرس اتصال الدالة  $g$  على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^t = 0 = g(0)$$

لدينا (0)  $g$  متصلة على اليمين في 0

نستنتج أن الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty]$

$$\forall (x \in [0, +\infty]); L(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (2)$$

(أ) نبين أن الدالة  $L$  متصلة على  $[0, +\infty]$

بما أن الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty]$  فإنها تقبل دوالاً أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تتعدم عند 0 هي  $dt$

إذن  $L$  هي أصلية  $g$  على المجال  $[0, +\infty]$  و تتحقق  $L(0) = 0$

و منه  $L$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty]$  ما يعني أنها متصلة على  $[0, +\infty]$

الدالة  $L$  متصلة على المجال  $[0, +\infty]$

(ب) نحسب  $L(x)$  من أجل  $x > 0$

$$g(\forall x > 0); L(x) = \int_0^x g(t) dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$$

لدينا (0)  $G$  أصلية لـ

$$\begin{cases} G(x) = e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

و بما أن  $G$  متصلة على  $[0, +\infty]$  فإن  $G$  معرفة كما يلي

نستنتج أن

$$(\forall x > 0); L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

ج) لدينا  $L(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$  وبما أن  $L$  متصلة على اليمين في 0 فإن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = 0$

(3) لنبين أن المتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و لنحدد نهايتها

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}^* \right); s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

بما أن الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[0,1]$  فإن المتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و لدينا

$$\boxed{\lim s_n = \frac{1}{e}}$$

إضافةمبيان الدوال  $L$  و  $g$  و  $f$ 