

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014

الموضوع

٢٠١٤ | نموذج
٢٠١٤ | ملحوظ
٢٠١٤ | ملحوظ
٢٠١٤ | ملحوظ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

RS 24

النوع	المادة
الرياضيات	
شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك
مدة الإنجاز	
المعامل	

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرин الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)

- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات(1ن)

- التمرين الثالث يتعلق بالبنية الجبرية.....(3.75n)

- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25n)

- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5n)

- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5n)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصناديق U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W . إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U تم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V تم نسحب منه تانيا كرتين.

1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ? 0.25

2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.

حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم.

نضع: $c_n = 2 \cdot 10^n - 1$ و $b_n = 2 \cdot 10^n$

1- بين أن: $\frac{c_n}{b_n} \neq \frac{b_n}{c_n}$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما . 0.5

(b) a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

2- أوجد زوجاً (x_n, y_n) من \mathbb{Z}^2 يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$ 0.5

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع $J = [-1, 1]$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

1- تتحقق أن: $0 < ab < 1$ ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميلي. 0.5

ب) بين أن $(*, J)$ يقبل عنصراً محايداً يتم تحديده. 0.25

ج) بين أن $(*, J)$ زمرة تبادلية. 0.5

// - نعتبر التطبيق f المعروف على \mathbb{C} بما يلي:

1- بين أن الدالة f تقابل من \mathbb{C} نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب).

لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشكل من (\perp, \mathbb{C}) نحو $(*, J)$ حيث: $J^* = J - \{0\}$ 0.5

3- نذكر أن (\perp, \mathbb{C}) زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون \perp توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .

بين أن (\perp, J) جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (3.25 ن)

I- 1- حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $Re(a) > 0$) 0.5

2- أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $a + 1$

ب) استنتاج أن: $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ 0.25

ج) تتحقق أن: $i = 1 + a(1-a)$ ثم استنتاج الشكل المثلثي للعدد $a - 1$ 0.5

<p>II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعمد منظم و مباشر (O, u, v) ، نعتبر النقط A و B و M' التي ألحاقها على التوالي هي a و $-a$ و z' و z و نفترض أن: $zz' + i = 0$</p>		
1- لتكن N النقطة التي لحقها \bar{z} مرافق z بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعمدان.	0.25	
2- أ) بين أن: $z' - a = i \frac{z - a}{az}$	0.25	
ب) بين أنه إذا كان $a = z^1$ فإن: $a - z^1$ و	0.5	
3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية. بين أن النقطة M' تنتهي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM	0.5	
<u>التمرين الخامس:</u> (7.5 نقط)		
I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي:		
وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعمد منظم (O, i, j) بحيث: $\ i\ = 1\text{cm}$		
1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائجتين المحصل عليهما.	1	
2- أحسب (f') ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty]$	0.75	
3- لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $[0, 1]$ بما يلي: (أ) بين أن الدالة g_n تناظرية قطعا على المجال $[0, 1]$	0.25	
ب) استنتاج أنه لكل n من \mathbb{N}^* يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[0, 1]$ بحيث:	0.5	
ج) بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$	0.5	
د) بين أن المتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدة قطعا ثم استنتاج أنها متقاربة.	0.75	
4- نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$		
(أ) تحقق أن $0 < a_1 \leq l \leq 1$	0.25	
ب) تتحقق أن: $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ حيث: $h(a_n) = n$	0.25	
ج) بين أن: $l = 1$	0.5	
د) استنتاج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$	0.25	
1 - أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}_+ ،	0.25	
ب) باستعمال طريقة المتكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$	0.5	
ج) أستنتاج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوى المحسور بين المنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي:	0.25	

2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعين n و k بحيث $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(*) $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$

ج) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي:

1- لكل x من ، نضع :

$$k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

أتحقق أنه لكل x من المجال $[0, +\infty]$ لدينا:

ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$ وقابلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$

ج) احسب $(x)' g$ لكل x من $[0, +\infty]$ ثم استنتاج أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0, +\infty]$

2- أ) بين أن:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+\right) \quad \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$$

ب) استنتاج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

انتهى

التمرين الأول

$$U(2N, 2B); V(2N, 2B); W(1N, 2B)$$

(1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U لكي يتم السحب من الصندوق U يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق W و هذا الاحتمال هو:

الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U هو: $\frac{2}{3}$

(2) احتمال الحصول على كرتين بيتضادين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيتضادين من $U(2N, 3B)$ أو سحبنا كرة سوداء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيتضادين من $V(3N, 2B)$

$$\text{إذن احتمال هذا الحدث هو: } \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 10} = \frac{7}{30}$$

احتمال الحصول على كرتين بيتضادين في نهاية التجربة هو $\frac{7}{30}$

(3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$p((X=1)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{18}{30} \quad \text{و} \quad p((X=0)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$$

$$\text{و لدينا حسب السؤال (2)} \quad p((X=2)) = \frac{7}{30}$$

و منه قانون احتمال المتغير العشوائي X مقدم في الجدول التالي:

k	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n \in \mathbb{N}); c_n = 2 \cdot 10^n - 1 \quad \text{و} \quad b_n = 2 \cdot 10^n + 1$$

(1) لدينا $b_n \wedge c_n = 1$ عدد فردي فإذا $c_n \wedge 2 = 1$ وبما أن $b_n \wedge c_n = c_n \wedge (b_n - c_n) = c_n \wedge 2$ نستنتج أن b_n و c_n أوليان في ما بينهما

أوليان في ما بينهما

(2) بما أن $b_n \wedge c_n = 1$ فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد (x_n, y_n) من \mathbb{N}^2 بحيث $b_n x_n + c_n y_n = 1$ نحدد x_n و y_n باستعمال خوارزمية أقليدس:

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n 10^n + (1 - 10^n)b_n$$

لدينا

نستنتج أن

$y_n = 10^n$ و $x_n = 1 - 10^n$

التمرين الثالث

$$\forall (a,b) \in (-1,1)^2; a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad I$$

$$\begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \Rightarrow |ab| < 1 \Rightarrow -1 < ab < 1 \Rightarrow 0 < 1 + ab < 2 \quad (1) \text{ لدينا:}$$

إذن

$$\forall (a,b) \in (-1,1)^2; 1 + ab > 0$$

$$a * b - 1 = \frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab} < 0 \quad \text{لدينا}$$

$$a * b + 1 = \frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} = \frac{(a+1)(1+b)}{1+ab} > 0 \quad \text{و}$$

نستنتج أن $-1 < a * b < 1$ و منه $a * b \in J$ وبالتالي:*** قانون داخلي في J**

(2) أ) لنبين أن القانون * تبادلي و تجميلي

$$\forall (x,y) \in J^2; x * y = \frac{x+y}{1+xy} = y * x \quad \text{لدينا}$$

$$\forall (x,y,z) \in J^3; (x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \text{لدينا و}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1+x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz} \quad \text{و}$$

إذن $(\forall (x,y,z) \in J^3); (x * y) * z = x * (y * z)$ و منه القانون * تجميلي**القانون * تبادلي و تجميلي**

ب) تحديد العنصر المحايد

لتحديد e من J بحيث $x * e = x$

$$\forall x \in J; x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \stackrel{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow} x+e = x+x^2e \Leftrightarrow (1-x^2)e = 0$$

و بما أن $x \in [-1,1]$ فإن $1-x^2 \neq 0$ و منه $e=0$ و (J) القانون * تبادلي إذن $x * 0 = 0 * x$ وهذا يعني أن**0 هو العنصر المحايد للقانون ***ج) لنبين أن $(J, *)$ زمرة تبادليةليكن x من J و x' مماثله (إذا وجد) بالنسبة للقانون *

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x \quad \text{لدينا}$$

و بما أن $x \in [-1,1]$ فإن $-x \in [-1,1]$ فالقانون * تبادلي إذن $0 = x * x' = x' * x = x' * 0$

و منه لكل x من J مماثل بالنسبة للقانون * هو $-x$
 خلاصة: القانون * تبادلي و تجمعي و يقبل عنصراً محايداً و لكل عنصر من J مماثل في J إذن
زمرة تبادلية $(J, *)$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ تطبيق معرف على } \mathbb{R} \text{ ب } II$$

(1) لتبين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو

ليكن y من J و لحل المعادلة: $(x \in \mathbb{R}); f(x) = y$

$$(x \in \mathbb{R}); f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن J فإن $y \in J$ و منه لكل y من J سابق و حيد في \mathbb{R} هو $\ln \frac{1+y}{1-y} > 0$ نستنتج أن

f تقابل من \mathbb{R} نحو

ملاحظة: يمكن أن نتبين تقابل f باستعمال اتصال و رتابة f .

(2) لـ قانون معرف على J ب: $(\forall (x, y) \in J^2); x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

لتبين f أن تشكل من $(\times, \perp, \mathbb{R}^*)$ نحو

لدينا $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$

و بما أن g هو التقابل العكسي ل f فإن $f(g(f(x)) = x, g(f(y)) = y)$

نستنتج أن $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$ وهذا يعني أن

أن f تشكل من $(\times, \perp, \mathbb{R}^*)$ نحو

(3) لتبين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

لدينا f تشكل من $(\times, \perp, \mathbb{R}^*)$ نحو $(J^*, \perp, \mathbb{R}^*)$ زمرة تبادلية إذن $(J^*, \perp, \mathbb{R}^*)$ زمرة تبادلية

ولدينا $(*, \perp)$ زمرة تبادلية و \perp توزيعي على * نستنتج أن

$(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

التعريف الرابع

(1) لـ حل في \mathbb{C} المعادلة I

$$z + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ لدينا}$$

بما أن a هو حل المعادلة بحيث $\operatorname{Re}(a) > 0$ فإن $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي :

$$S = \{-a, a\}$$

(2) معيار و عددة العدد العقدي $1+a$ لدينا

$$1+a = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

نستنتج أن

$$|1+a| = 2 \cos \frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad \arg(1+a) \equiv -\frac{\pi}{8}[2\pi]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}|1+a| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

حسب السؤال السابق لدينا ومنه

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$(ج) لنبين أن (1+a)(1-a) = 1+i$$

$$(1+a)(1-a) = 1-a^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}(+2i)\right) = 1+i$$

لدينا إذن

$$\boxed{(1+a)(1-a) = 1+i}$$

استنتاج الشكل المثلثي ل $1-a$

$$1-a = \frac{1+i}{1+a} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2\cos\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8}\right] = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right]$$

لدينا إذن الشكل المثلثي للعدد $1-a$

$$\boxed{1-a = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right]}$$

في المستوى المنسوب الى معلم متعمد منظم II لدينا M, B, A و M' النقط التي ألحاقها على التوالي $a, z, -a$ و \vec{z} .

حيث $z = 0 + i\vec{z}$ و N النقطة التي لحقها \vec{z} .

(1) لنبين أن المستقيمين (OM) و (ON) متعمدان

$$\text{Arg}\left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{ON})}{\text{aff}(\overrightarrow{OM})}\right) \equiv \text{Arg}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)(2\pi) \text{ و } \widetilde{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})} \equiv \text{Arg}\left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{ON})}{\text{aff}(\overrightarrow{OM})}\right)(2\pi)$$

لدينا

$$\text{و وهذا يعني أن } \widetilde{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ و منه } \text{Arg}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ فإن } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}\bar{z}}{zz} = \frac{\bar{z}\bar{z}}{-i} = i\bar{z} = \left[z\bar{z}, \frac{\pi}{2}\right]$$

و بما أن

$$\boxed{\text{المستقيمين } (OM) \text{ و } (ON) \text{ متعمدان}}$$

$$(2) \text{ لنبين أن } z - a = i \frac{z - a}{az}$$

$$z - a = \frac{-i}{z} - a = \frac{-i - az}{z} = \frac{-ia - a^2 z}{az} \stackrel{(a^2 = -i)}{=} \frac{-ia + iz}{az} = i \frac{z - a}{az}$$

لدينا

و هذا هو المطلوب

$$\boxed{z - a = i \frac{z - a}{az}}$$

$$(b) \text{ لدينا } z + a = z - a + 2a = i \frac{z - a}{az} + 2a = \frac{iz - ia + 2a^2 z}{az} = -i \frac{z + a}{az}$$

$z \neq -a \Rightarrow z + a \neq 0 \Rightarrow z + a \neq 0 \Rightarrow z \neq -a$ ومنه

أي أن :

$$\boxed{z' \neq -a \Rightarrow z \neq -z'}$$

$$\text{ولدينا } \frac{z' - a}{z + a} = \frac{i \frac{z - a}{az}}{-i \frac{z + a}{az}} = -\frac{z - a}{z + a} \quad \text{إذن } z' + a = -i \frac{z + a}{az} \quad \text{و } z' - a = i \frac{z - a}{az}$$

$$\boxed{\frac{z' - a}{z + a} = -\frac{z - a}{z + a}}$$

(3) بما أن النقط M, B, A غير مستقيمية فإن النقط M' غير مستقيمية

$$\text{إذن } A \text{ و } M' \text{ متداوية يكافيء } M, B, A$$

$$\text{ولدينا } \frac{z' - a}{z + a} = -\frac{z - a}{z + a} \Rightarrow \frac{z - a}{z - a'} \times \frac{z' + a}{z' + a} = -1 \quad \text{إذن } M' \text{ متداوية}$$

ومنه

$$\boxed{\text{النقطة } M' \text{ تتبع إلى الدائرة المحيطة بالمثلث } AMB}$$

التمرين الخامس

$$f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{دالة معرفة على } [0, +\infty[$$

(1) حساب極限 f عند 0^+ و عند ∞

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \right) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

التأويل الهندسي

$$\boxed{\text{محور الأفاسيل مقارب ل } (C) \text{ و محور الاراتيب مقارب ل } (C) \text{ بجوار } \infty}$$
(2) حساب مشتقة f

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x \ln x - 2x}{2x^2 \sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} \right) \quad \text{قابلة للانشقاق على } [0, +\infty[\text{ ولدينا}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x - 2$ أي إشارة $\ln x - \ln e^2$ و منه
$$\boxed{f \text{ تزايدية قطعا على المجال } [e^2, +\infty[\text{ و تناقصية قطعا على }]0, e^2[}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ مع } g_n(x) = f(x) - x^n \quad \text{دالة معرفة على } [0, 1[\quad (3)$$

(أ) لنبين أن g_n تناقصية قطعا على $[0,1]$ $(\forall x \in [0,1]; g_n(x) = f'(x) - nx^{n-1})$ قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ ولدينا g_n بمان أن < 0 فإن $\forall x \in [0,1] ; g_n(x) < 0$ (فإن $\forall x \in [0,1] ; f'(x) < 0$) و منه $\boxed{[0,1] \text{ تناقصية قطعا على } g_n}$ (ب) لنبين أن $\exists! \alpha_n \in [0,1] ; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$ إذن g_n تقابل من $[0,1]$ نحو g_n ولدينا

$$g_n([0,1]) = \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) \right] = [-1, +\infty[$$

و بما أن $0 \in [-1, +\infty[$ فإن للمعادلة 0 سابق و حيد $\alpha_n \in [0,1]$ يعني $\alpha_n = 0$ و بما أن $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ فإن $g_n(\alpha_n) = f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n$ وهذا هو المطلوب: $\boxed{\exists! \alpha_n \in [0,1] ; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n}$ (ج) لنبين أن $0 < g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* ; n+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists! \alpha_{n+1} \in [0,1]$ حسب السؤال (ج)و لدينا $g_n(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n = (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1) < 0$ إذن $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$ و هذا هو المطلوب $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0}$ (د) لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعالدينا $g_n(\alpha_n) = 0$ و $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} > \alpha_n$ وبما أن $\forall n \in \mathbb{N}^* g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$ فإن g_n تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$ ما يعني أن : $\boxed{\text{المتتالية } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ تزايدية قطعا}}$ المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة(أ) لتحقق من أن $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$ (4)بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n \geq \alpha_1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in [0,1]$ و بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in [0,1]$ تزايدية قطعا فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \geq \alpha_1$ تتحقق و منه $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \geq \alpha_1$ نستنتج أن l نهاية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\boxed{0 < \alpha_1 \leq l \leq 1}$ (ب) لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* ; h(\alpha_n) = n$

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$$
 لدينا

$$(\forall x > 0) ; f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{و بما أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$$

$$(\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \frac{-\ln \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$$
 فإن

و منه

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln((\alpha_n)^{\frac{n+1}{2}})}{-(\alpha_n)^{\frac{n+1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{\frac{n+1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{-(\alpha_n)^{\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{\frac{n+1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) = n$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$$

(ج) لتبين أن $l = 1$ نفترض أن $1 < l < 0$ إذن $h(\alpha_n) = h(l)$ معرفة و متصلة على المجال $[0, 1]$ فإنو هذا غير ممكن لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$l = 1$$

(د) لتبين أن $0 < l < 1$ لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \alpha_n} = 0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \alpha_n = -\infty$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n = \ln(1) < 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

(I) لندرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}^* لدينا $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و $x = 1 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx = 0$ و $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$

نستنتج أن

$$(\forall x \in [0, +\infty[); \int_x^1 f(x) dx \geq 0$$

(ب) لتبين أن $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$ لدينا $(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = \int_x^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}(-\ln x) \right]_x^1 - \int_x^1 (2\sqrt{x}) \left(\frac{-1}{x} \right) dx = 2\sqrt{x} \ln x + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$= 2\sqrt{x} \ln x + 2 \left[2\sqrt{x} \right]_x^1 = 2\sqrt{x} \ln x + 4(1 - \sqrt{x}) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

و منه

$$(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

(ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x = 1$ و $x = e^2$ و $x = 0$ لتكن S هذه المساحة ب cm^2 لدينا cm^2 المساحة المطلوبة هي

$$S = 4cm^2$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) : \text{لكل } n \in \mathbb{N}^* \text{ نضع}$$

(أ) لدينا f متصلة وتناقصية قطعا على $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0,1]$ و $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset]0,1[$ إذن f متصلة وتناقصية قطعا على $[0,1]$

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \quad \text{و} \quad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

و لدينا $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = u_n$ إذن $f(1) = 0$ حيث $1 \leq k \leq n-1$ و $n \geq 2$ من \mathbb{N} لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(1) \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) : \text{بالمقاييس السابقة تستلزم أن:}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = u_n$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right); u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) : \text{نستنتج بعد التعويض في (1) أن:}$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) : \text{يعني أن}$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(ج) \text{ حسب السؤال (ب) وبوضع } x = \frac{1}{n} \text{ نحصل على } xf(x) + \int_x^1 f(x) dx \leq u_n \leq xf(x) + \int_x^1 f(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) + \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

إذن حسب خاصيات النهايات والترتيب

$$\lim u_n = 4$$

التمرين السادس

(أ) الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty)$ بـ $g(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ و نضع $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

$$(1) \text{ لدينا } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -k(\sqrt{x})$$

إذن

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \right); g(x) = -k(\sqrt{x})$$

(ب) اتصال و اشتقاق الدالة g

الدالة $t \rightarrow e^{-t^2}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (أصلية φ التي تتعدم عند 1) و الدالة $t \rightarrow \sqrt{t}$ متصلة على $[0, +\infty]$ و قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$ إذن الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$ و قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$ (مركب k و φ) إذن:

g متصلة على $[0, +\infty]$ و قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$

(ج) حساب $g'(x)$

$$\text{لدينا } (\forall x \in [0, +\infty]); g'(x) = -k'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$(\forall x \in [0, +\infty]); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

بما أن $0 < x \in [0, +\infty]$ فإن g تناقصية قطعا على $[0, +\infty]$ وبما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعا على $[0, +\infty]$

الدالة g تناقصية قطعا على $[0, +\infty]$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \quad (2) \text{ لتبين أن}$$

ليكن x من \mathbb{R}_+^* الدالة g متصلة على المجال $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على $[0, x]$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c من $[0, x]$ بحيث

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{x} \\ c^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2 < -c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ 0 < e^{-x^2} < e^{-c^2} \end{cases} \text{ لدينا}$$

الصفحة (8)

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \text{ ومنه}$$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

(ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

$$\lim_{x \rightarrow +0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \begin{cases} \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases} \text{ لدينا :}$$

وبالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

إضافة مبيان الدالتيين f و h

