المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية......................(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات...........................(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....................(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E):\ z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

0.25 أ) تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E)

0.5 ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: $b \in \mathbb{R}$)

0.25 ج) تحقق أن: $b=(1-i\sqrt{3})a$

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.
لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

0.5 أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

0.5 ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$

0.5 ج) تحقق أن: $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

0.5 د) لتكن C نقطة، لحقها c، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتخالف O و A
حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 1- علما أن: $1=749\times 2015-1051\times 1436$، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما.

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

0.5 أ) بين أن d يقسم 1436

0.5 ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما.

0.75 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $x^{1440}\equiv 1\ [5]$ و $x^{1440}\equiv 1\ [13]$ و $x^{1440}\equiv 1\ [31]$

(لاحظ أن: $2015=5.13.31$)

0.5 ب) بين أن: $x^{1440}\equiv 1\ [65]$ ثم استنتج أن: $x^{1440}\equiv 1\ [2015]$

0.5 4- بين أن : $x\equiv 1051\ [2015]$

التمرين الثالث:(4 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E=\{M(x)/\ x\in\mathbb{R}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي: $M(x)\top M(y)=M(x+y+1)$ $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$

1- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بما يلي: $\varphi(x)=M(x-1)$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\top)$

0.5 ب) بين أن $(E,\top)$ زمرة تبادلية.

0.5 2- أ) بين أن: $M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$ $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$

0.5 ب) استنتج أن E جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$ و أن القانون "$\times$" تبادلي في E

0.5 ج) بين أن القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون "$\top$" في E.

0.5 د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في $(E,\top)$ و أن I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$.

0.25 3- أ) تحقق أن: $M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\right)$

0.75 ب) بين أن $(E,\top,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right) \quad \text{إذا كان} \quad x>0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

0.25 3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}.

0.25 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=x$

0.5 ج) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ: $e^{-1}=0.4$)

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=e^{-1}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

0.5 1- بين بالترجع أن: $e^{-1}\leq u_n<1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

3- نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

0.25 أ) بين أن: $e^{-1}\leq l\leq 1$

0.5 ب) حدد قيمة l

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

0.25 | 1- أ) بين أن الدالة: $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة: $h : x \mapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

0.5 | ب) بين أن: $\int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt \quad (\forall x>0)$

0,5 | ج) استنتج أن: $F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x) \quad (\forall x>0)$

0.25 | 2- أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.5 | ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(0)=\ln 2$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ إذا كان $x>0$

0.5 | 1- أ) بين أن : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x} \quad (\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x])$

0.5 | ب) بين أن: $e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2 \quad (\forall x>0)$

0.25 | ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

0.75 | 2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x>0$

0.5 | 3- أ) بين أن : $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t} \quad (\forall t>0)$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0.5 | ب) بين أن : $-1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} \quad (\forall x>0)$

0.5 | ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

انتهى

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times1051-2015\times749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv1436[2015]$ إذن : $\exists k\in Z\ /\quad x^{1439}-2015k=1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times749$ إذن : $d/1436\times1051-2015\times749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge2015=1$

3

أ) لدينا : $2015=5\times13\times31$ ، بما أن : $x\wedge2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times13\times31)=1$ إذن : $\begin{cases}x\wedge5=1\\x\wedge13=1\\x\wedge31=1\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases}x^4\equiv1[5]\\x^{12}\equiv1[13]\\x^{30}\equiv1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\left(x^4\right)^{360}\equiv1[5]\\\left(x^{12}\right)^{120}\equiv1[13]\\\left(x^{30}\right)^{48}\equiv1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}x^{1404}\equiv1[5]\\x^{1404}\equiv1[13]\\x^{1404}\equiv1[31]\end{cases}$

ب)

لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5/x^{1404}-1 \\ 13/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(5 \vee 13)/x^{1404}-1$ أي : $65/x^{1404}-1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 65/x^{1404}-1 \\ 31/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(65 \vee 31)/x^{1404}-1$ أي : $2015/x^{1404}-1$

أي : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

4

لدينا : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440} \equiv 1436\,x[2015]$ و لدينا : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

إذن : $1436\,x \equiv 1[2015]$ منه : $1436\,x - 2015~ = 1 \quad / \quad \exists ~ \in Z$

منه : $1436\,x - 2015~ = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه : $1436(x-1051) = 2015(~ - 749)$

منه : $2015/1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015 \wedge 1436 = 1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x \equiv 1051[2015]$

تمرين 3 :

$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ ، $E = \{M(x) \; / \; x \in IR\}$ ، $\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \top M(y) = M(x+y+1)$

$$¨ : IR \to E$$
$$x \mapsto ¨(x) = M(x-1)$$

1

أ)

لدينا : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad ¨(x+y) = M(x+y-1)$

و $\forall (x,y) \in IR^2 \quad ¨(x) \top ¨(y) = M(x-1) \top M(y-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$

إذن : $¨(x+y) = ¨(x) \top ¨(y)$ ، $\forall (x,y) \in IR^2$ إذن : ¨ تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(E,\top)$

ب)

لدينا $¨(x+1) = M(x)$ $\forall x \in IR$ إذن $¨(m) = M$ $\forall M \in E \; \exists m \in IR /$ أي أن ¨ شمول أي : $¨(IR) = E$

إذن و بما أن : $(IR,+)$ زمرة تبادلية فإن $(E,\top)$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $¨(0) = M(-1)$

2

أ)

لدينا لكل $(x,y) \in IR^2$:

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$$

ب)

بما أن : $(x,y) \in IR^2 \Rightarrow x+y+xy \in IR$

فإن : $(M(x), M(y)) \in E^2 \Rightarrow M(x+y+xy) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$ ، ولدينا أيضا :

$\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+yx) = M(y) \times M(x)$

أي أن القانون $\times$ تبادلي

ج)

لدينا : لكل $(x,y,z) \in IR^3$:

$$M(x) \times (M(y) \top M(z)) = M(x) \times M(y+z+1) = M(x+y+z+1+x(y+z+1))$$
$$M(x) \times (M(y) \top M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

و

$$(M(x) \times M(y)) \top (M(x) \top M(z)) = M(x+y+xy) \top M(x+z+xz) = M(x+y+xy+x+z+xz+1)$$
$$(M(x) \times M(y)) \top (M(x) \top M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

منه : $M(x) \times (M(y) \top M(z)) = (M(x) \times M(y)) \top (M(x) \top M(z))$

و لكون القانونين $\times$ و $\top$ تبادليان فإن : $(M(y) \top M(z)) \times M(x) = (M(y) \times M(x)) \top (M(z) \top M(x))$

إذن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $\top$ في E

د)

لدينا : $M(x) \top M(-1) = M(-1) \top M(x) = M(x-1+1) = M(x) \quad \forall x \in IR$

إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T)

ولدينا: $M(0)=I$ و ، $M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x)$ $\quad \forall x\in IR$

إذن : I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$

3

أ) لدينا : $M(0)=I$ $\quad (\forall x\in IR-\{-1\})\ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$

ب) لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$

القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي

القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$

إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع :

الجزء الأول: $\begin{cases} f(x)=x(1+\ln^2 x); & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\ln^2 x)=+\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$)

و $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$

ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

2

أ) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+(\sqrt{x}\ln x)^2=0+0^2=0=f(0)$

إذن f متصلة يمين الصفر

للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ \ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\frac{1}{2}$)

ب) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$)

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$

ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس ، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا

المنحنى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $+ \to (+)\times(+)$ $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$

ج) لدينا : $\forall x>0 \quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$

لدينا : $\forall x>0\quad (\ln x+1)^2\geq 0$ ، و $(\ln x+1)^2=0 \iff \ln x=-1 \iff x=\frac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد ، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل ،حلان، ...)

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x + 1)\times\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

و لدينا : $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ و $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: : $f(x) - x = x\ln^2 x \geq 0$ و $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم $(D): \ y = x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)

الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع : Super Graph

الجزء الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1 نعلم أن : $e > 1$ إذن : $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي : $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$ ، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$) ، إذن حسب مبدأ الترجع: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

2 لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n) \quad \forall n \in IN$

و لدينا : $\forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1 \Rightarrow \forall n \in IN \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in IN \quad u_n \ln^2(u_n) > 0$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، و بما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

3

أ) لدينا : $\frac{1}{e}\le u_n<1$ $\forall n\in IN$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e}\le l\le 1$

ب) لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right)=\left[\frac{2}{e};1\right]\subset\left[\frac{1}{e};1\right]$ و المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l

إذن l تحقق المعادلة $f(x)=x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0

و لكون : $\frac{1}{e}\le l\le 1$ ، فإن : $l=1$

الجزء الثالث:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt \qquad \forall x\in[0;+\infty[$$

1

أ) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$H'(x)=\left(\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x\right)'=\frac{-2}{4}x+\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{2}x+x\ln x+\frac{1}{2}x=x\ln x=h(x)$$

إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h

ب) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$\int_1^x t\ln^2(t)dt=\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\ln^2(t)dt=\left[\frac{1}{2}t^2\ln^2(t)\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{2}t^2\,2\ln(t)\times\frac{1}{t}dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$$

ج) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$F(x)=\int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt=\int_1^x t+t\ln^2(t)dt=\int_1^x t\,dt+\int_1^x t\ln^2(t)dt$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left[\frac{-1}{4}t^2+\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left(\frac{-x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}=\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

2

أ) نعلم أن الدالة f متصلة على $[0;+\infty[$، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، و منه : $F(x)=k(x)-k(1)$ $\forall[0;+\infty[$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$

ب)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)==\frac{-3}{4}+0-0+0=\frac{-3}{4}$$

بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt=-\int_1^0 f(t)dt=-F(0)=-\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\frac{3}{4}$

التمرين الخامس :

$$\begin{cases}g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt & ;\ x>0\\ g(0)=\ln 2\end{cases}$$

1

أ) ليكن $x>0$ ، لدينا : $t\in[x,2x]\ \Rightarrow\ x\le t\le 2x\ \Rightarrow\ -2x\le -t\le -x\ \Rightarrow\ e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$

إذن : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$ $(\forall t\in[x,2x])$ $(\forall x>0)$

ب) حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{e^{-2x}}{t}\le\frac{e^{-t}}{t}\le\frac{e^{-x}}{t}$ $(\forall t\in[x,2x])$ $(\forall x>0)$

منه : $\int_x^{2x}\frac{e^{-2x}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-x}}{t}dt$ $(\forall x>0)$

منه: $e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \le g(x) \le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \quad (\forall x>0)$ أي: $e^{-2x}[\ln t]_x^{2x} \le g(x)\le e^{-x}[\ln t]_x^{2x} \quad (\forall x>0)$

منه: $e^{-2x}(\ln 2x-\ln x)\le g(x)\le e^{-x}(\ln 2x - \ln x) \quad (\forall x>0)$

بالتالي: $e^{-2x}\ln 2 \le g(x) \le e^{-x}\ln 2 \quad (\forall x>0)$

ج) بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0

2

بما أن الدالة $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا، لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x>0 \qquad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

3

أ) ليكن $t>0$، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية:

$$\exists c_t\in\,]0,t[\qquad \frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)$$

ولدينا: $\forall x>0\quad p'(x)=-e^{-x}$ ، منه: $\exists c_t\in\,]0,t[\quad \frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}$

ولدينا: $c_t\in\,]0,t[\;\Rightarrow\; 0<c_t<t \;\Rightarrow\; -t<-c_t<0 \;\Rightarrow\; e^{-t}<e^{-c_t}<1 \;\Rightarrow\; -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$

منه: $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$

بالتالي: $\forall t>0\quad -1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ أو أيضا: $\forall t>0 \quad -1\le \frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$

ب) لدينا: $\forall t>0\quad -1\le \frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ منه: $\forall x>0\quad \int_x^{2x}-1\,dt \le \int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}\,dt$

منه: $\forall x>0\quad [-t]_x^{2x} \le \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le [e^{-t}]_x^{2x}$

منه: $\forall x>0\quad -2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}$

بالتالي: $\forall x>0\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

ج) بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-2\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times1+1=-1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-1=-1$ ، فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.