

...

الصفحة
1
2



C: NS22

7	المعامل:	الرياضيات	المادة:
3	مدة الإجاز:	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	الشعب (ة) أو المسلك :

يسمى باستعمال الآلة الحاسمة غير القابلة للبرمجة.

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعدد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(-2, 2, 8)$ و $B(6, 6, 0)$

و $C(2, -1, 0)$ و $D(0, 1, -1)$ و (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تتحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1) حدد مثلث إحداثيات المتجهة $\vec{OC} \wedge \vec{OD}$ واستنتج أن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) . 0.75

2) تتحقق من أن (S) هي الفلكة التي مر بها $(2, 4, 4)$ وشعاعها 6. 0.5

3) أ- احسب مسافة النقطة O عن المستوى (OCD) . 0.5

ب- استنتاج أن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) . 0.5

ج- تتحقق من أن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ثم استنتاج أن النقطة O هي نقطة تمسّك الفلكة (S) والمستوى (OCD) . 0.75

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعدد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A و B و C التي

الحالها على التوالي هي : $a = 2 - 2i$ و $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

1) اكتب على الشكل المثلثي كلًا من العددين العقديين a و b . 1

2) نعتبر الدوران R الذي مر بها النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R . 0.75

يبين أن : $z' = bz$

ب- تتحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R . 0.5

3) بين أن : $\arg c \equiv \arg a + \arg b [2\pi]$ ثم حدد عددة للعدد العقدي c . 0.75

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس).

نسحب عشوائيًا وتاتي ثلات كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدتين التاليتين : 1.5

A : الحصول على ثلات كرات من نفس اللون . و B : الحصول على ثلات كرات مختلفة اللون متشابه .

يبين أن : $P(A) = \frac{3}{44}$ و $P(B) = \frac{3}{44}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة ثلات كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X . 0.25

ب- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$. 1.25

التمرين الرابع (2 ن)

$$\text{نضع: } J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx \quad \text{و} \quad I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$$

(1) - تحقق من أن: $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ لكل عدد حقيقي x يخالف -3 .

ب- بين أن: $I = 1 - 3 \ln 2$.

(2) باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن: $J = -I$.

0.25

0.75

1

مسألة (9 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث :

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعدد منتظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) تتحقق من أن: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ (1) 0.75
هي \mathbb{R} وأن: $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 4$ و أول هذه النتيجة هندسيا.

(3) أ- بين أن: $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$ 1
لكل x من \mathbb{R} وتحقق من أن $f'(0) = 0$.

ب- ادرس إشارة $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}}$ على \mathbb{R} واستنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0, +\infty]$ وتناقصية على المجال $[-\infty, 0]$. 1

(4) أ- تتحقق من أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = 2x + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right)$ 0.25

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادنته $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

(5) أ- تتحقق من أن: $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ لكل x من \mathbb{R} .

ب- ادرس إشارة كل من $-2 - \frac{2}{\sqrt{e^x}}$ و $\sqrt{e^x} - 2$ على \mathbb{R} .

ج- استنتج أن: $2 \leq \sqrt{e^x} - 2 \leq \sqrt{e^x} + 2$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$.

د- بين أن: $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$.

(6) أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطي انعطاف أقصول إحداثها أصغر من 1- و أقصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب ونأخذ $\ln 4 = 1.4$).

(II) لنكن (u_n) المتتالية العددية المعروفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N} .
يمكنك في ما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f .

(1) بين أن: $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من \mathbb{N} .

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

(3) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

0.75

0.75

1

تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الامتحان الوطني دورة يونيو 2009

تقديم: ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{OC}(2;-1;0) \quad (1)$$

$$\text{و } \overrightarrow{OD}(0;1;-1)$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{و منه : } \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

. نبين أن : معادلة ديكارتية للمستوى (OCD)

نعلم أن : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD) .

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) تكتب على شكل : $x + 2y + 2z + d = 0$

وحيث أن O نقطة من المستوى (OCD) فإن : $0 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$ أي أن : $d = 0$

وبالتالي : معادلة ديكارتية للمستوى (OCD)

$$\text{لدينا : } M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad (2)$$

إذن (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

وبالتالي: مركز الفلكة هو منتصف القطعة $[AB]$ أي $\Omega\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{2+6}{2}; \frac{8+0}{2}\right)$

$$\text{وشاع الفلكة هو } R = \frac{\sqrt{(6+2)^2 + (6-2)^2 + (-8)^2}}{2} = 6$$

أ. مسافة Ω عن المستوى (OCD) هي : $d(\Omega; (OCD)) = \frac{|2 + 2 \times 4 + 2 \times 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{18}{3} = 6$

ب. بما أن $d(\Omega; (OCD)) = 6$ وشاع الفلكة يواكب العدد 6
فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

ج. تتحقق أن $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0$

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{OA}(-2, 2, 8)$$

$$\text{و } \overrightarrow{OB}(6, 6, 0)$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-2) \times 6 + 2 \times 6 + 8 \times 0 = 0$$

استنتاج : لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0$ إذن :

ولدينا : $O \in (OCD)$

إذن : O نقطة مشتركة بين (S) و (OCD) .

وحيث أن للفلكة (S) والمستوى (OCD) نقطة مشتركة وحيدة لأن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .
ومنه O هي نقطة تمس (OCD) و (S) .

التمرين الثاني :

(1) نكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين a و b :

$$\text{معيار } a \text{ هو } |a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$a = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{لدينا :}$$

معيار العدد B هو :

$$b = 1 \times \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 1 \times \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$b = 1 \times \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \quad \text{و} \quad a = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ومنه :}$$

$$z' = b z \quad \text{أ. نبين أن}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} M' = R(M) &\Leftrightarrow z' = e^{i \frac{5\pi}{6}} (z - z_o) + z_o \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) z \\ &\Leftrightarrow z' = bz \end{aligned}$$

$$z' = b z \quad \text{ومنه}$$

لدينا :

$$bz_A = \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) (2 - 2i) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 - 2i) = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + 1 = z_c$$

ومنه: النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

$$\arg c \equiv \arg b + \arg a \quad [2\pi] \quad \text{(نبين ان :)}$$

لدينا النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R . إذن :

$$\arg c \equiv \arg b + \arg a \quad [2\pi] \quad \text{وبالتالي :}$$

نحدد عددة للعدد c :

$$\arg b \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg a \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{لدينا :}$$

$$\arg c \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$\arg c \equiv \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi] \quad \text{وبالتالي :}$$

3B ; 4N ; 5R

ليكن Ω كون الإمكانيات .

السحب يتم تانيا . إذن كل سحبة عبارة عن تأليفه لثلاثة عناصر من بين 12

$$\text{وبالتالي : } \text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

بما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس فإن الإحتمال منتظم . (لدينا فرضية تساوي الإحتمال) .

احتمال الحدث A : الحصول على 3 كرات من نفس اللون يعني سحب 3 كرات بيضاء أو 3 كرات سوداء أو 3 كرات

$$\text{card}(A) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$$

$$\text{ومنه : احتمال الحدث A هو : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

احتمال الحدث B : الحصول على 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى يعني سحب كرة من كل لون .

$$\text{card}(B) = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$$

$$\text{ومنه : احتمال الحدث A هو : } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

$$\text{ومنه : } p(B) = \frac{3}{11} \quad p(A) = \frac{3}{44}$$

(1) عندما نسحب 3 كرات تانيا من الكيس فإن عدد الألوان التي يمكن سحبها هو : 1 او 2 او 3 .

ومنه القيم الممكنة التي يمكن للمتغير العشوائي X أن يأخذها هي : 1 و 2 و 3 .

ب.2.

حساب احتمال الحدث $(X = 1)$:الحدث $(X = 1)$ هو الحصول على لون واحد أي أن لكرات الثلاث المسحوبة نفس اللون .الحدث $(X = 1)$ هو الحدث A (الوارد في السؤال 1)

$$\text{إذن : } p(X = 1) = p(A) = \frac{3}{44}$$

حساب احتمال الحدث $(X = 3)$:الحدث : $(X = 3)$ هو الحصول على 3 ألوان أي سحب كرة من كل لون

$$\text{إذن الحدث } (X = 3) \text{ هو الحدث B (الوارد في السؤال 1) . وبالتالي : } p(X = 3) = p(B) = \frac{3}{11}$$

حساب احتمال الحدث $(X = 2)$:الحدث $(X = 2)$ هو الحصول على لونين مختلفين بالضبط .

$$p(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}\Omega} = \frac{145}{220} = \frac{1}{5} \quad \text{وبالتالي } \text{card}(X = 2) = \text{card}\Omega - (\text{card}A + \text{card}B) = 145$$

ومنه قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{11}$

$$\text{الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : } E(X) = \left(1 \times \frac{3}{44}\right) + \left(2 \times \frac{1}{5}\right) + \left(3 \times \frac{3}{11}\right) =$$



<http://www.vrec-colorings.com>

التمرين الرابع :

أ. توحيد المقام ..

ب. نبين أن : $I = 1 - 3\ln 2$

لدينا :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3} dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} 1 dx - \int_{-2}^{-1} \frac{3}{x+3} dx = [x]_{-2}^{-1} - 3 \int_{-2}^{-1} \frac{(x+3)}{x+3} dx = 1 - 3[\ln|x+3|]_{-2}^{-1} \\ &= 1 - 3(\ln 2 - \ln 1) = 1 - 3(\ln 2 - 0) \end{aligned}$$

ومنه $I = 1 - 3\ln 2$ نبين أن : $J = -I$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} u(x) = \ln(2x+6) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

وبالتالي : $\ln 4 = 2\ln 2$ لأن $J = [x \ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = -\ln 4 + 2\ln 2 - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = -I$ ومنه $J = -I$ مسألة : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ نتحقق أن : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ لكل x من R
ليكن x من R ، لدينا

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left[(\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 \right] + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$$

ومنه $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ تكون الدالة f معرفة إذا كان : $e^x \geq 0$ و $x \in R$ و $0 > 0$ وحيث أن $0 > 0$ و $e^x > 0$ لكل x من R فإن : $e^x \geq 0$ و $0 > 0$ لكل x من R ومنه الدالة f معرفة على R .ليكن x من R ، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ إذن : $\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} > 0$ وبالتالي : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$ لكل x من R (2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1) = +\infty$ 

ن. نبين أن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln 4$.

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \ln 2 = \ln 4$. إذن : $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$

هندسياً : المستقيم الذي معادلته $y = \ln 4$ مقارب مواز لمحور الأفاسيل جوار $(-\infty)$.

$$f'(x) = 2 \times \frac{2 \times (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} = 2 \times \frac{2 \times \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} (\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{e^x} (\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} : R .$$

لدينا : $e^0 = 1$ لأن $f'(0) = \frac{2\sqrt{e^0} (\sqrt{e^0} - 1)}{(\sqrt{e^0} - 1)^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$.

بـ. ندرس إشارة $\sqrt{e^x} - 1$

$$\sqrt{e^x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} > 1$$

$$\sqrt{e^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 \quad \text{و}$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

ومنه : جدول إشارة $\sqrt{e^x} - 1$ هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$	-	0	+

استنتاج :

ليكن x من R .

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x} (\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} : \text{لدينا}$$

وبما أن : $0 < \sqrt{e^x} < 2\sqrt{e^x} < 0$ فإن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$.

ومنه : f تزايدية على $[0; +\infty]$ وتناقصية على $(-\infty; 0]$.

أ. ليكن x من R ,

$$f(x) = 2 \ln \left(e^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \right) = 2 \left[\ln e^x + \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \right] = 2x + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) : \text{لدينا}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) = 0 : \text{لدينا} \quad (4)$$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$.

أ. ليكن x من R ,

$$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 : \text{لدينا}$$

$$\therefore \text{لكل } x \text{ من } R \text{ .} \quad \text{ومنه : } (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$$

لدينا : ب(5)

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x} - 2 > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} > 2 \\ &\Leftrightarrow e^x > 4 \\ &\Leftrightarrow x > \ln 4\end{aligned}$$

و

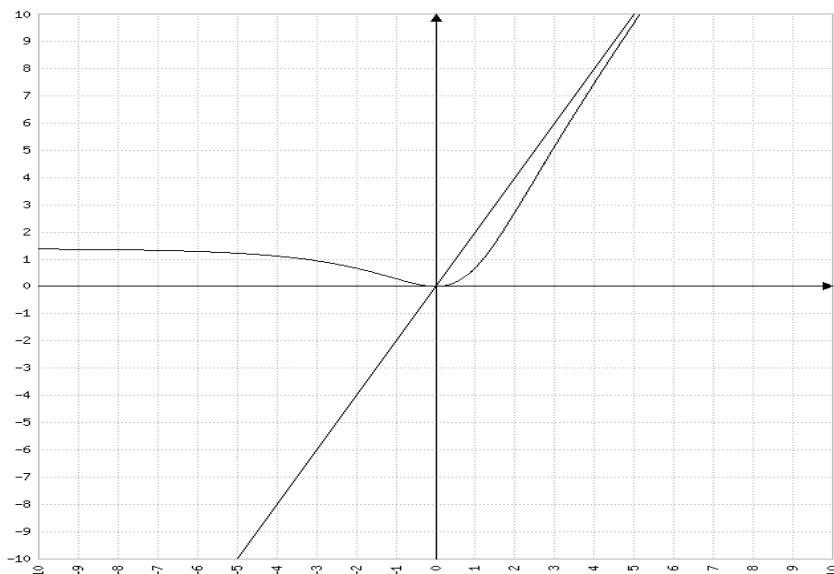
$$\begin{aligned}\sqrt{e^x} - 2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 2 \\ &\Leftrightarrow e^x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 4\end{aligned}$$

ومنه : جدول إشارات $\sqrt{e^x} - 1$ هو :

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$	-	0	+

جدول إشارات $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ هو :

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$	-	○	+	+
$\sqrt{e^x} - 2$	-	-	○	+
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$	+	○	-	+

ج(5). ليكن x من $[0; \ln 4]$,لدينا : إذن $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leq 0$:وبالتالي . $[0; \ln 4]$ لكل x من $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$:د.5. ليكن x من $[0; \ln 4]$,لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ إذن : $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln(e^x)^{\frac{1}{2}}$: أي $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln\sqrt{e^x}$:وبالتالي : $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \frac{1}{2}\ln(e^x)$ ومنه : $2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln(e^x)$:وبالتالي . $[0; \ln 4]$ لكل x من $f(x) \leq x$ 6. إنشاء منحني : f 

(II) نعتبر المتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N .

ن Devin أن : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من N

من أجل $n = 0$ لدينا : $1 \leq u_0 \leq \ln 4$ لأن $1 = u_0$.
ليكن n من N .

نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ ول Devin أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$.
لدينا : $0 \leq u_n \leq \ln 4$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 4)$ لأن f تزايدية قطعا على المجال $[0; \ln 4]$.

وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$

ومنه حسب مبدأ الترجع : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من N .

2 Devin أن المتالية (u_n) تناقصية :

ليكن n من N .

لدينا : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل x من $[0; \ln 4]$ و

إذن : $f(u_{n+1}) - u_n \leq 0$ أي : $f(u_n) \leq u_n$

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من N .

ومنه : المتالية (u_n) تناقصية

3 Devin أن (u_n) متقاربة ونحدد نهايتها :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0.

إذن : (u_n) متقاربة. لتكن l نهايتها.

لدينا :

الدالة f متصلة على المجال I ، $f(I) \subset [0; \ln 4]$ و $I \subset N$ و (u_n) متقاربة

إذن : l حل للمعادلة $f(x) = x$ في $I = [0; \ln 4]$

ليكن x من $I = [0; \ln 4]$

لدينا :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1 \text{ ou } \sqrt{e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } \sqrt{e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 4$$

وبما أن المتالية (u_n) تناقصية فإن $0 = l$

ومنه : المتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1



<http://www.vmac-coloriages.net>