

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2013

الموضوع



RS22

3	مدة إنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	الشعب (أو المسلك)

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؟
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؟
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان) ؟
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؟
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما ، يمكنه استعمال نتائجه هذا السؤال لمعالجة الأسئلة المaulية ؟
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؟
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب الحالات كما يلي :

النقطة المنوحة	المجال	التمرين
3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	المتاليات العددية	التمرين الثالث
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الرابع
8 نقط	دراسة دالة وحساب التكامل	التمرين الخامس

- بالنسبة للتمرين الخامس ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النيري

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(0,0,1)$ و $B(1,1,1)$ و $C(2,1,2)$ التي مرکزها $\Omega(1,-1,0)$ وشعاعها هو $\sqrt{3}$ و الفلكة (S)

1) بين أن $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S) وتحقق من أن A تنتمي إلى (S) 0.75

2) أ- بين أن $\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{AC}$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 0.75

ب- احسب المسافة $d(\Omega, (ABC))$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في A 0.75

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (ABC) 0.75

$$\text{أ- بين أن } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in IR) \quad 0.25$$

ب- استنتاج مثلثي إحداثيات نقطي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S) 0.5

التمرين الثاني (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 8z + 25 = 0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A و B و C التي 0.75

الحقها على التوالي هي : $a = 4 + 3i$ و $b = 4 - 3i$ و $c = 10 + 3i$ والإزاحة T التي متجهتها \overrightarrow{BC} 0.75

أ- بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالإزاحة T هو $d = 10 + 9i$. 0.75

ب- تحقق من أن $\frac{b-a}{d-a} = \frac{b-a}{1+i}$ ثم اكتب العدد العقدي $\frac{b-a}{1+i}$ على الشكل المثلثي. 1

ج- بين أن $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$ 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ لكل n من IN

1) تحقق من أن $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ لكل n من IN 0.5

2) أ- بين بالترجع أن $u_n > 1$ لكل n من IN 0.5

ب- بين أن المتالية (u_n) تناقصية . 0.5

ج- استنتاج أن المتالية (u_n) متقاربة . 0.25

3) لتكن (v_n) المتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 1$ لكل n من IN

أ- بين أن المتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم اكتب v_n بدالة n 0.5

ب- بين أن $u_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1$ لكل n من IN ثم احسب نهاية المتالية (u_n) 0.75

يحتوي كيس على 9 بيدقات : أربع بيدقات بيضاء و ثلاث بيدقات سوداء و بيدقتان خضراء .
(لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس)
سحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس .

- 1) نعتبر الحدين A : " الحصول على ثلاثة بيدقات من نفس اللون "
و B : " الحصول على ثلاثة بيدقات مختلفة اللون مثنى مثنى ".

بين أن $P(B) = \frac{2}{7}$ و $P(A) = \frac{5}{84}$

- 2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات السوداء المسحوبة .
أ - تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3

ب- بين أن $P(X=1) = \frac{15}{28}$ و $P(X=2) = \frac{3}{14}$

ج - أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الخامس (8 ن)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

1) أ- تتحقق من أن $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$ لكل x من \mathbb{R} .

ب- بين أن $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ لكل x من $[0, +\infty)$ واستنتج أن الدالة g تناقصية على $[0, 1]$ وتزايدية على $[1, +\infty)$

2) بين أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty)$ (لاحظ أن $g(1) = 0$).

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty)$ بما يلي :

و ليكن (C) المنحنى الممثّل للدالة f في معلم متعدّد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 1 cm) .

1) أ- بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا هذه النتيجة .

ب- بين أن $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right)$ لاحظ أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج- استنتاج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- بين أن $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$ لكل x من $[0, +\infty)$

ب- تتحقق من أن $\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $[0, +\infty)$ و استنتاج أن الدالة f تزايدية على $[0, +\infty)$

3) أ- بين أن $y = 2x - 2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1, 0)$

ب- أنشئ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) المستقيم (T) والمنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة هي A)

4) أ- تتحقق من أن $\int_1^e \ln x dx = 1$ دالة أصلية للدالة $H: x \mapsto \ln x$ على $[0, +\infty)$ ثم بين أن

ب- باستعمال متكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) وممحور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلاتها $x=1$ و $x=e$ هي

$\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$

تصحيح التمرين الأول

(1)

✓ لدينا (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1, -1, 0)$ وشعاعها هو $\sqrt{3}$
إذن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل :

$$(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

إذن : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3$
إذن : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 3$
ومنه : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$
✓ لدينا : $(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 0 + 0 + 1 - 0 + 0 - 1 = 0$
إذن : A تتتمى إلى (S)

-أ (2)

✓ لدينا : $\overrightarrow{AC}(2, 1, 1)$ و $\overrightarrow{AB}(1, 1, 0)$
إذن :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (-1)\vec{k} \\ &= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, -1, -1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)
إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : للمستوى
 $(1)x + (-1)y + (-1)z + d = 0$ أي :
 $x - y - z + d = 0$
و لدينا : $d = 1$ إذن : $A(0, 0, 1) \in (ABC)$ أي :
و بالتالي : $x - y - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

-ب

$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|(1) - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ✓
✓ بما أن R شعاع الفلكة (S) فان المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)
و بما أن $A \in (ABC) \cap (S)$ فان نقطة التماس هي

(3) أ- لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, -1, -1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و
إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, -1, -1)$ موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا : $\Omega(1, -1, 0) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (1) + t(1) = 1 + t \\ y = (-1) + t(-1) = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) : (\Delta) \\ z = (0) + t(-1) = -t \end{cases}$$

و منه تمثيل باراميترى للمستقيم (Δ) :

بـ- لنحدد مثلاً إحداثيات نقطى تقاطع (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x, y, z) \in (\Delta) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد : $t^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 1 + (-1) = 0 \\ y = -1 - (-1) = 0 \\ z = -(-1) = 1 \\ t = -1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

إذن :

تصحيح التمرين الثاني

(1) لحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 8z + 25 = 0$

لدينا : $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -36$

بما أن $\Delta < 0$ فأن المعادلة تقبل حلين عقبيان متراكفين :

$$z_1 = \frac{-(-8) - i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8 - 6i}{2} = 4 - 3i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-(-8) + i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i$$

و منه $S = \{4 - 3i, 4 + 3i\}$:

(2) أـ- لدينا $D(d)$ صورة $A(a)$ بالإزاحة T

إذن : $d = a + z_{\overrightarrow{BC}}$

إذن : $d = a + c - b$

إذن : $d = (4 + 3i) + (10 + 3i) - (4 - 3i)$

و منه : $d = 10 + 9i$

-بـ-

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{(4-3i) - (4+3i)}{(10+9i) - (4+3i)} = \frac{-6i}{6+6i} = \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2}(1+i) \quad \checkmark$$

لدينا :

✓

$$\left| -\frac{1}{2}(1+i) \right| = \left| \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet$$

• الشكل المثلثي :

$$\frac{-1}{2}(1+i) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

-ج-

$$\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$

تصحيح التمرين الثالث

(1) ل يكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } \mathbb{N} \text{ } u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

-أ-

✓ من أجل $n = 0$

$$u_0 = 2$$

$$u_0 > 1 : \text{ إذن : }$$

✓ ل يكن $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن $u_n > 1$

• و نبين أن $u_{n+1} > 1$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) \quad \text{لحسنا حسب نتيجة السؤال (1) :}$$

و حسب الإفتراض لدينا $u_n > 1$ إذن $u_n - 1 > 0$

إذن $u_{n+1} - 1 > 0$ و منه

✓ نستنتج أن $u_{n+1} > 1$ ل كل $n \in \mathbb{N}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}(u_n - 1)$$

لدينا : $u_n - 1 > 0$

$$\text{إذن : } -\frac{4}{5}(u_n - 1) < 0$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من \mathbb{N}

و بالتالي : المتالية (u_n) تنقصصية

ج- بما أن (u_n) تنقصصية و مصغررة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$ (3)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n : \text{لدينا باستعمال نتيجة السؤال (1)}$$

$$\text{إذن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

و منه المتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ و حدتها الأولى $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

لنكتب v_n بدلالة n

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \times q^n$$

$$\text{إذن : } v_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\text{و منه : } v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

-ب-

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ✓

$$u_n - 1 = v_n \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } u_n = v_n + 1$$

$$\text{و منه كل } n \text{ من } \mathbb{N} : u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \quad \text{فإن } -1 < \frac{1}{5} < 1 \quad \text{بما أن }$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب في آن واحد ثلاثة بيدقات من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{لدينا } \text{card}\Omega = C_9^3 = 84$$

" الحصول على ثلاثة بيدقات من نفس اللون " : A (1)

$$[\underline{B}], [\underline{B}], [\underline{B}] \quad \text{أو} \quad [\underline{N}], [\underline{N}], [\underline{N}]$$

$$\text{card}A = C_4^3 + C_3^3 = 4+1=5$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{5}{84}$$

" الحصول على ثلاثة بيدقات مختلفة اللون متى مثنى " : B

$$[\underline{B}], [\underline{N}], [\underline{V}]$$

$$\text{card}B = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

- (2)

$$[\underline{N}], [\underline{N}], [\underline{N}] \rightarrow X = 0$$

$$[\underline{N}], [\underline{N}], [\underline{N}] \rightarrow X = 1$$

$$[\underline{N}], [\underline{N}], [\underline{N}] \rightarrow X = 2$$

$$[\underline{N}], [\underline{N}], [\underline{N}] \rightarrow X = 3$$

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84} = \frac{3 \times 6}{84} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14} \quad \text{بـ}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} = \frac{3 \times 15}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ج- لنحدد قانون احتمال X

$$p(X = 0) = \frac{C_6^3}{84} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

$$p(X = 1) = \frac{15}{28}$$

$$p(X = 2) = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

تصحيح التمرين الخامس

■I

أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$ (1)

$$(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \quad \text{إذن :}$$

-ب-

ل يكن $x \in]0, +\infty[$ ✓

$$g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \quad \text{إذن : } g'(x) \text{ لكل } x \in]0, +\infty[$$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x} \quad \text{إذن : } 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \quad \text{لدينا : } \checkmark$$

$$\text{ولدينا } x > 0 \quad \text{إذن : } g'(x) \text{ هي إشارة } \frac{2x+1}{x} \text{ و منه إشارة } x-1$$

x	0	$1+\infty$
$x-1$	-	0+

• على المجال $[0, 1]$: لدنا $g'(x) \leq 0$ \Rightarrow g تناظرية

• على المجال $[1, +\infty[$: لدنا $g'(x) \geq 0$ \Rightarrow g تزايدية

(2) لدنا g تناظرية على $[1, +\infty[$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

إذن (1) g هي القيمة الدنيا للدالة g على $[0, +\infty[$

إذن : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq g(1)$

إذن : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$

■II

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty \quad \text{أ-} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

-ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} : \text{ لأن}$$

ج- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 - 1 - (\ln x)^2 \right)' \\ &= 2x - 0 - 2\ln'(x) \cdot \ln(x) \\ &= 2x - \frac{2\ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2\ln x}{x} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{إذن: } &\left[0, +\infty \right[f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \\ \text{ب- ليكن } &x \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x + x}{x} = \frac{x^2 - \ln x}{x} \quad \checkmark$$

$$\text{إذن: } \left[0, +\infty \right[\text{ لكل } x \text{ من } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) : \text{ لدينا } \checkmark$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) : \text{ إذن :}$$

و لدينا حسب الجزء الأول $g(x) \geq 0$: (2)

$$]0, +\infty[f'(x) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) > 0 : \text{ إذن :}$$

و منه الدالة f تزايدية قطعا على $[0, +\infty[$

(3) أ- معادلة ديكارتية للمسقط (T) المماس للمنحني (C) في النقطة $A(1,0)$

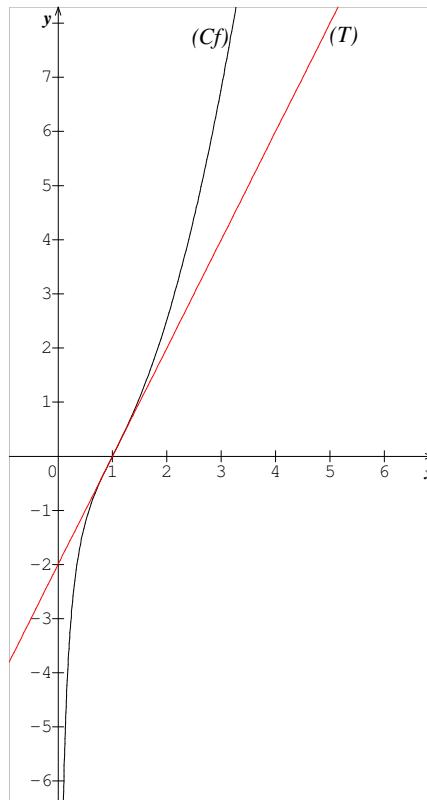
$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$f'(1) = 2 \left(\frac{g(1)}{1} + 1 \right) = 2 \text{ و } f(1) = 0 : \text{ لدينا } 0$$

$$\text{إذن : } y = 2 \cdot (x - 1) + 0$$

و منه : $y = 2x - 2$ هي معادلة ديكارتية للمسقط (T) المماس للمنحني (C) في النقطة $A(1,0)$

-ب-



-أ-

✓ الدالة $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

✓ ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$H'(x) = (x(\ln x - 1))' = (x)' \cdot (\ln x - 1) + x \cdot (\ln x - 1)' = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

إذن $]0, +\infty[$ لكل x من $H'(x) = h(x)$

و بالتالي : $h : x \mapsto \ln x$ دالة أصلية للدالة $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ على $]0, +\infty[$

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left[x(\ln x - 1) \right]_1^e = (e(\ln e - 1)) - (1(\ln 1 - 1)) = 1 \quad \bullet$$

-ب-

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \nwarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \uparrow$$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \nwarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \uparrow$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 \, dx &= \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \cdot \frac{x \cdot \ln x}{x} \, dx \\ &= (e - 0) - 2 \int_1^e \ln x \, dx \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلتها هما $x = 1$ و $x = e$

$$A = \int_1^e |f(x)| \, dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$f(x) \geq 0 : [1, e]$ على المجال

$$A = \int_1^e f(x) \, dx \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$$

$$A = \int_1^e \left(x^2 - 1 - (\ln x)^2 \right) \, dx \text{ cm}^2$$

$$A = \left(\int_1^e (x^2 - 1) \, dx - \int_1^e (\ln x)^2 \, dx \right) \text{cm}^2$$

$$A = \left(\left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^e - \int_1^e (\ln x)^2 \, dx \right) \text{cm}^2$$

$$A = \left(\left(\frac{e^3}{3} - e \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - (e - 2) \right) \text{cm}^2$$

و بالتالي : مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتها هما $x = 1$ و $x = e$

$$\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2 \text{ هي}$$

٢٣