Tronc commun science	Série 2 **Les fonctions numériques**	prof: atmani najib

Exercice 1:

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

1) Etudier la parité de la fonction f
2) Déterminer la nature et les caractéristiques de la courbe (C_f)
3) a) Construire dans un même repère les deux courbes (C_f) et la parabole (P) d'équation $y=x^2$

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{2x}{x+1}-x^2\geq 0$
4) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{2|x|}{|x|+1}$

   a) Etudier la parité de la fonction g

   b) Montrer que $g(x)=f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

   c) Construire dans le même repère la courbe de la fonction g.

Exercice2:

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+\frac{4}{x^2}$

1) a) Déterminer le domaine de la définition de f

   b) Etudier la parité de f
2) a) Montrer que $T=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a+b)((ab)^2-4)}{(ab)^2}$ pour a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$

   b) Déduire que f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ et st décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$

   c) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^*$ (justifier)

   d) Déduire que $x^2+\frac{4}{x^2}\geq 4$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$
3) On considère la fonction h définie par $h(x)=x|x|+\frac{4}{x|x|}$

   a) Etudier la parité de h

   b) Montrer que $g(x)=f(x)$ pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$

   c) Dresser le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}^*$ (justifier)

Correction :

Exercice 1:

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

1) On a $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

La fonction f est ni paire ni impaire

Contre exemple : $f(2)=\dfrac{4}{3}$ et $f(-2)=4$ donc $f(-2)\neq f(2)$ et $f(-2)\neq -f(2)$

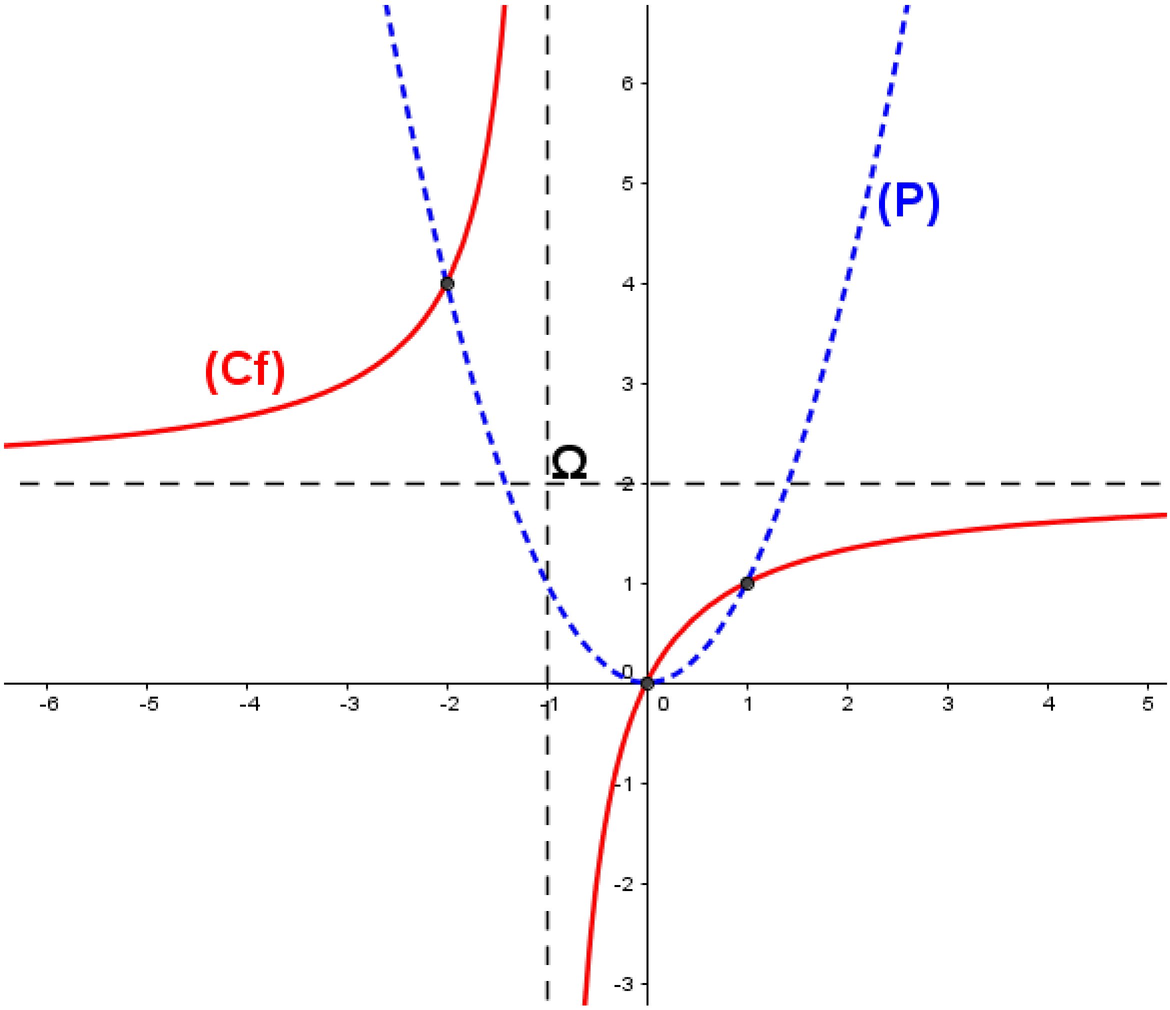
2) F est une fonction homographique donc (C_f) est une hyperbole de centre de symétrie

le point $\Omega(-1;2)$ (car $\dfrac{-d}{c}=-1$ et $\dfrac{a}{c}=2$)

et d'asymptotes les deux droites d'équations $x=-1$ et $y=2$

3) a) La parabole (P) d'équation $y=x^2$ passe par les deux points $A(1;1)$ et $B(2;4)$

L'hyperbole (C_f) passe par $O(0;0)$, $C(1;1)$ et $D(2;\dfrac{4}{3})$



b) L'inéquation $\frac{2x}{x+1}-x^2 \geq 0$ est équivaut à $\frac{2x}{x+1} \geq x^2$

Pour résoudre cette inéquation on cherche les intervalles où (C_f) est en dessus de (P) d'après la figure l'ensemble des solutions est $S=[-2;-1[\cup[0;1]$

4) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{2|x|}{|x|+1}$

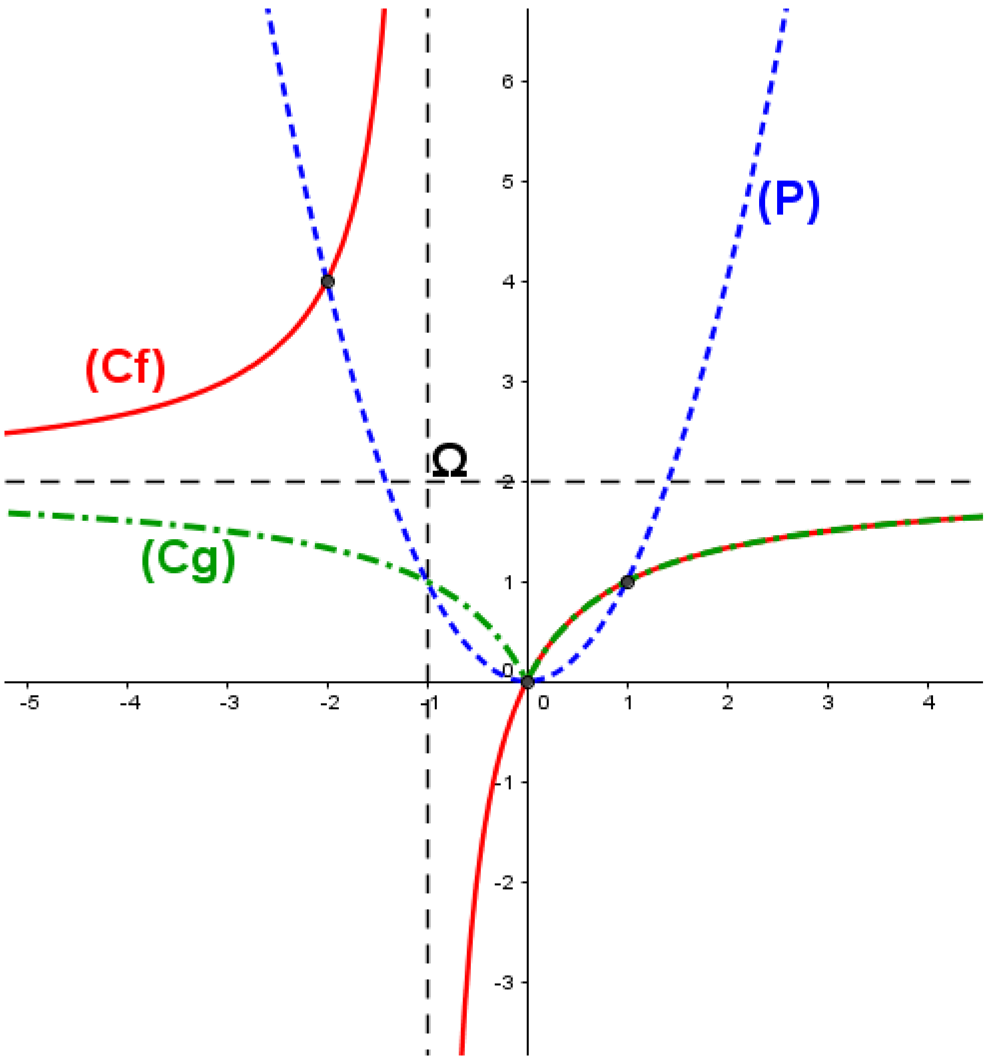
a) On a $|x| \geq 0$ donc $|x|+1 \geq 1$ d'où le dénominateur ne s'annule pas donc $D_g=\mathbb{R}$

$g(-x)=\frac{2|-x|}{|-x|+1}=\frac{2|x|}{|x|+1}=g(x)$ donc g est une fonction paire

b) On sait que pour tout x de $\mathbb{R}^+$: on a $|x|=x$ donc $f(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

c) La courbe de la fonction g.

g est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sur $\mathbb{R}^+$ la courbe de f est confondue avec celle de g et sur $\mathbb{R}^-$ la courbe de g est obtenue avec une symétrie axiale



Exercice2:

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$

1) a) On a $D_f=\{x\in\mathbb{R}\setminus x\neq 0\}=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b) On a D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x)=f(x)$ car $(-x)^2=x^2$

donc f est une fonction paire

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$

on a $T=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{a^2+\dfrac{4}{a^2}-b^2-\dfrac{4}{b^2}}{a-b}=\dfrac{\dfrac{a^4b^2+4b^2-a^2b^4-4a^2}{a^2b^2}}{a-b}=\dfrac{(ab)^2(a^2-b^2)-4(a^2-b^2)}{(ab)^2(a-b)}$

$=\dfrac{((ab)^2-4)(a^2-b^2)}{(ab)^2(a-b)}=\dfrac{((ab)^2-4)(a+b)}{(ab)^2}$

b) Sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ on a $a\geq\sqrt{2}$ et $b\geq\sqrt{2}$ donc $a+b>2\sqrt{2}$ car $a\neq b$

et $ab>2$ c-à-d $(ab)^4>4$ donc $T>0$ d'où f est st croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

Sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$ on a $0<a\leq\sqrt{2}$ et $0<b\leq\sqrt{2}$ donc $0<ab<2$ car $a\neq b$

donc $-4<(ab)^2-4<0$ et on a $0<a+b<2\sqrt{2}$ donc $T<0$ d'où f est st décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$

c) f est paire et croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$

f est paire et décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$ donc f est croissante sur $\left[-\sqrt{2};0\right[$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de $f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

d) On a 4 est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^*$ donc $f(x)\geq 4$ pur tout x de $\mathbb{R}^*$

donc $x^2+\dfrac{4}{x^2}\geq 4$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

3) On considère la fonction h définie par $h(x)=x|x|+\dfrac{4}{x|x|}$

a) On a $D_h=\{x\in\mathbb{R}\setminus x\neq 0\}=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ donc D_h est symétrique par rapport à 0

et $h(-x)=-x|-x|+\dfrac{1}{-x|-x|}=-(x|x|+\dfrac{1}{x|x|})=-h(x)$ car $|-x|=|x|$ donc f est impaire

b) Pour tout x de $]0;+\infty[$ on a $|-x|=|x|$ donc $h(x)=f(x)$

c) D’après la dernière question f et h ont les même variations sur $\left]0;+\infty\right[$

h est impaire et croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ donc h est croissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$

h est impaire et décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$ donc h est décroissante sur $\left[-\sqrt{2};0\right[$

Le tableau des variations de h

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	