Tronc Commun

Série 1 : Produit scalaire

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle , tel que : $AB=\sqrt{7}$, $AC=2$ et $BC=3$

1. Calculer $\cos\left(B\widehat{A}C\right)$ et montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$
2. On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
   a. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$
   b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB=2\sqrt{3}$, $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3$

1. Trouver la mesure d'angle $B\widehat{A}C$.
2. Soit I le milieu du segment $[BC]$, calculer BC et en déduire la valeur de AI .

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB=6$, $AC=5$ et $BC=7$

1. Montrer que : $\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\frac{1}{5}$
2. a. calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
   b. en déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$
3. Soit H le projeté orthogonal du point A sur $[BC]$. calculer la distance BH .

Exercice 4 :

Soient A et B deux points du plan tel que : $AB=6$

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ tel que I est le milieu du segment $[AB]$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :
   a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-9$
   b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$
   c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-12$
   d. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle, tel que : $AB = \sqrt{7}$, $AC = 5$ et $BC = 2$

1. montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 14$.
2. montrer que : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$.
3. soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer la distance AH .
4. soit I le milieu du segment $[BC]$.calculer la distance AI .
5. On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{12}{25}\overrightarrow{AC}$
   a. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$
   b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

Corrigé de l'exercice 1 :

1.
   - ▷ D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(B\widehat{A}C\right)$

     Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

     Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{\left(\sqrt{7}\right)^2 + (2)^2 - (3)^2}{2\left(\sqrt{7}\right) \times (2)} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

   - ▷ On sait que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(B\widehat{A}C\right)$

     Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{7}\right) \times (2) \times \dfrac{\sqrt{7}}{14} = 1$

2. a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.AC + \frac{1}{6}AC^2 \\
&= \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(2)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

   b) on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= \left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\\ &= -1+1=0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$

Donc $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$

Et par suite les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux .

Corrigé de l'exercice 2 :

1. On sait que : $\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

   Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

   Donc l'une des mesures de l'angle $B\widehat{A}C$ est $\dfrac{5\pi}{6}$ $(150°)$

2.
   - ▷ D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

     Donc : $BC^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+(1)^2-2(-3)=19$

     Et par suite : $BC=\sqrt{19}$
   - ▷ En appliquant le théorème de la médiane , on a :

     $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{1}{2}BC^2$

     Donc : $AI^2=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\dfrac{1}{2}BC^2\right)$

     Donc : $AI^2=\dfrac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{3}\right)^2+(1)^2-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{19}\right)^2\right)=\dfrac{7}{4}$

     Et par suite : $AI=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Corrigé de l'exercice 3 :

1. D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(B\widehat{A}C\right)$

Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{(6)^2 + (5)^2 - (7)^2}{2(6)\times(5)} = \dfrac{12}{60}$

Et par suite : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \dfrac{1}{5}$

2. a) on sait que : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = AB \times AC \times \cos\left(B\widehat{A}C\right)$

donc : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6 \times 5 \times \dfrac{1}{5}$

et par suite : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= BA^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} \\
&= BA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\
&= 6^2 - 6 \\
&= 30
\end{aligned}$$

3. on a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = BH \times BC \qquad \left(car \quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} > 0\right)$

donc : $BH = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{BC}$

donc : $BH = \dfrac{30}{7}$

Corrigé de l'exercice 4 :

1. soit M du plan, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}.\vec{0}+\left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= MI^2-\frac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

(Car I est le milieu du segment $[AB]$)

Donc : pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

2. a) on pose $E=\left\{M\in P \,/\, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-9\right\}$

$M\in E$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-9$

Equivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=-9$

Equivaut à $MI^2-\frac{1}{4}(6)^2=-9$

Equivaut à $MI=0$

Et par suite $E=\{I\}$

b) on pose on pose $F=\left\{M\in P \,/\, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7\right\}$

$M\in F$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$

Equivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=7$

Equivaut à $MI^2-\frac{1}{4}(6)^2=7$

Equivaut à $MI^2=16$

Equivaut à $MI^2=(4)^2$

Et par suite F est le cercle de centre I et de rayon 4

c) on pose on pose $G=\left\{M\in P \,/\, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-12\right\}$

$M\in G$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-12$

Equivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=-12$

Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = -12$

Equivaut à $MI^2 = -3$

Et par suite $G = \varnothing$

d) on pose on pose $H = \left\{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\right\}$

$M \in G$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$

Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = 0$

Equivaut à $MI^2 = (3)^2$

Et par suite H est le cercle de centre I et de rayon 3

(Rq : $M \in G$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Et par suite H est le cercle de diamètre $[AB]$)

Corrigé de l'exercice 5 :

1. D'après le théorème d'Al-kashi , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

   Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

   Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{7}\right)^2 + (5)^2 - (2)^2\right)$

   Et par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 14$

2. On sait que : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

   Donc : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \frac{14}{\sqrt{7} \times 5}$

   Et par suite : $\cos\left(B\widehat{A}C\right) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$

3. Puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

   Donc : $AH = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB}$

   Donc : $AH = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$

4. En appliquant le théorème de la médiane , on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right)$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{7}\right)^2 + (5)^2 - \frac{1}{2}(2)^2\right) = 15$

Et par suite : $AI = \sqrt{15}$

5. a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{25}\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}.AC + \frac{12}{25}AC^2 \\ &= \frac{1}{7}(14) + \frac{12}{25}(5)^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

b) on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC} \\ &= \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} \\ &= -14 + 14 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$

Donc $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$

Et par suite les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

つづく