## 01. باك 2015 الدورة العادية

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ .

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 2 cm ) .

### I.

**01.** بين أن : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ ( $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f ) . ..... ( 0.5 ن )

**02..**

أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . ..... ( 0.75 ن )

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده. ..... ( 0.5 ن )

ج- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة ( لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ . .. ( 0.5 ن )

**03...**

أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من $D_f$ . ..... ( 0.75 ن )

ب- بين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ . ..... ( 1 ن )

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على $D_f$ . ..... ( 0.25 ن )

### II.

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ .

و ليكن $(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم ( أنظر الشكل ) .

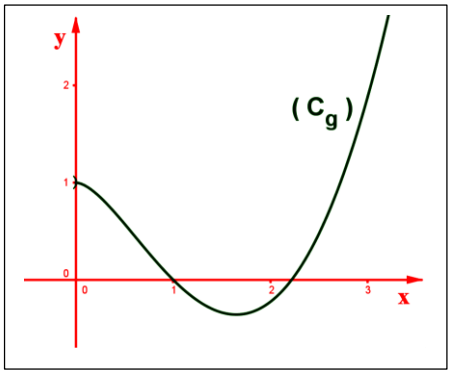
**01..**

أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $(E)$ التالية : $g(x)=0$ , $x\in]0;+\infty[$ . .. ( 0.5 ن )

ب- نعطي جدول القيم التالية :

| x | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|
| g(x) | −0,14 | −0,02 | 0,12 | 0,28 |

بين أن : المعادلة $(E)$ تقبل حلا $\alpha$ حيث : $2,2<\alpha<2,3$ . ..... ( 0.5 ن )




**02..**

أ- تحقق من أن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من $D_f$ . ..... ( 0.25 ن )

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و $\alpha$ . ..... ( 0.5 ن )

ج- حدد انطلاقا من $(\mathcal{C}_g)$ ؛ إشارة الدالة g على المجال $[1;\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$ ..... ( 0.5 ن )

**03.** أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ . ..... ( 1.25 ن )

**04.**..

أ- بين أن : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ ( لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من $D_f$ . ..... ( 0.75 ن )

ب- أحسب ، ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ . ..... ( 0.75 ن )

**III.** ...

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ .

**01.** بين بالترجع أن : $1 \le u_n \le \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ . ..... ( 0.5 ن )

**02.** بين أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية ( يمكن استعمال نتيجة السؤال II ) 2 ) ج - ) ..... ( 0.5 ن )

**03.** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها . ..... ( 0.75 ن )

## 02. باك 2014 الدورة العادية

**I.** لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D = ]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$ .

**01.** بين أن : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$ . ( 0.5 ن )

**02.** تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \le 0$ لكل x من $]0;1]$ و $g(x) \ge 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ . ( 0.75 ن )

**II.** نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$ . ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** بين أن : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة . ( 0.5 ن )

**02.** أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ . ( 0.25 ن )

ب – بين أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$ ( يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$ ) ثم بين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . ( 1 ن )

ج – حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ . ( 0.25 ن )

**03.** أ- بين أن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$ . ( 1.5 ن )

ب- ضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x) \ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ . ( 1 ن )

**04.** أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب ) . ( 0.75 ن )

**05.** نعتبر التكاملين $I$ و $J$ التاليين $I=\int_1^e\left(1+\ln(x)\right)dx$ و $J=\int_1^e\left(1+\ln(x)\right)^2dx$ .

أ – بين أن : $H:x\to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h:x\to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$ . ( 0.5 ن )

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=2e-1$ . ( 0.5 ن )

ج – أحسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ . ( 0.5 ن )

## 03. باك 2013 الدورة الاستدراكية

**I.** لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-x-\ln(x)$ .

**01.** أ – تحقق أن : $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$ . ( 0.25 ن )

ب - بين أن $g'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة $g$ تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$ .(ن1)

**02.** بين أن : $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ ( لاحظ أن $g(1)=0$ ) . ( 0.5 ن )

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2$ . و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** أ - بين أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة . ( 0.5 ن )

ب - بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ( لاحظ أن $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$ ) . ( 0.5 ن )

ج – استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحيد اتجاهه . ( 0.25 ن )

**02.** أ- بين أن : $f'(x)=2\left(\dfrac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ . ( 1 ن )

ب- تحقق أن : $\dfrac{g(x)}{x}+1=\dfrac{x^2-\ln(x)}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و استنتج أن $f$ تزايدية على $]0;+\infty[$ . ( 0.75 ن )

**03.** أ- بين أن : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ المماس للمنحى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$ . ( 0.5 ن )

ب- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي $A(1;0)$ ) . .(ن 1)

**04.** أ - لنتحقق أن الدالة $x\to x\left(\ln(x)-1\right)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم بين أن :

$I=\int_1^e\ln(x)dx=1$ . ( 0.75 ن )

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=e-2$ . ( 0.5 ن )

ج – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ هي $\dfrac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)$ $cm^2$ . ( 0.5 ن )

## .01 باك 2015 الدورة العادية

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ .

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 2 cm ) .

**I.**

**01.** نبين أن : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ ( $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f ) . ..... ( 0.5 ن )

لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $x(1-\ln x)\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq 0$ و $1-\ln x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $\ln x\neq \ln e$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$

$\Leftrightarrow x\in ]0;e[\cup]e;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

**02..**

أ- نحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . ..... ( 0.75 ن )

- $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} 1-\ln x=0^-$
- $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} 1-\ln x=0^+$
- تأويل هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما : منحنى f يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=e$ .

ب- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده. ..... ( 0.5 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}=0$ . لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} 1-\ln x=-\infty$
- نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقي بجوار $+\infty$ هو المستقيم الذي معادلته $y=0$

ج- نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة ( لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ . .. ( 0.5 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x-x\ln x}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=0$ و $-\ln x>0$
- تأويل هندسيا النتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$ .

**03...**

أ- نبين أن : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من $D_f$ . ..... ( 0.75 ن )

- الدالة العددية $f$ هي قابلة للاشتقاق على $D_f$ ( لأنها جداء و مقلوب دوال قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على $D_f$ )
- لدينا : $f'(x)=\left[\frac{1}{x(1-\ln x)}\right]'=\frac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}=-\frac{1-\ln x+\cancel{x}\times\left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right)}{(x(1-\ln x))^2}=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

خلاصة : $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل $x$ من $D_f$.

ب- نبين أن : الدالة $f$ تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1;e]$ و $[e;+\infty[$ . ..... ( 1 ن )

- ندرس إشارة $f'$ : إشارة $f'$ هي إشارة $\ln x$ على $D_f$
- على المجال $]0;1]$ لدينا $\ln x\le 0$ و منه : الدالة $f$ تناقصية على المجال $]0;1]$ .
- على كل من المجالين $[1;e]$ و $[e;+\infty[$ لدينا $\ln x\ge 0$ و منه : الدالة $f$ تزايدية على كل من المجالين $[1;e]$ و $[e;+\infty[$

ج- نضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $D_f$ . ..... ( 0.25 ن )

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | | |
| $f$ | ‖ | $+\infty$ | ↘ | $+\infty$ ↗ | | $0$ ↗ | |
| | ‖ | | $1$ | | | $-\infty$ | |

## II. ..

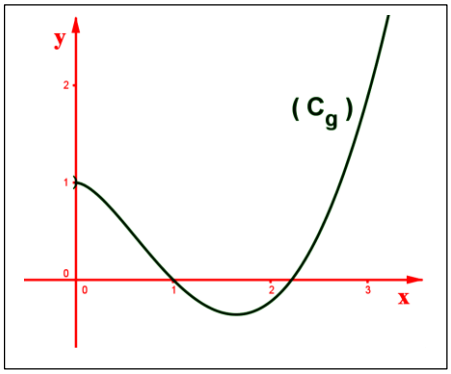
لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ .

و ليكن $(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة $g$ في معلم متعامد ممنظم ( أنظر الشكل ) .

### 01. ..

أ- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $(E)$ التالية : $g(x)=0$ , $x\in]0;+\infty[$ . .. ( 0.5 ن )

أي نحدد عدد نقط تقاطع المنحنى و محور الأفاصيل و بالتالي المعادلة لها حلين




ب- نعطي جدول القيم التالية :

| $x$ | $2,1$ | $2,2$ | $2,3$ | $2,4$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-0,14$ | $-0,02$ | $0,12$ | $0,28$ |

بين أن : المعادلة $(E)$ تقبل حلا $\alpha$ حيث : $2,2<\alpha<2,3$ . ..... ( 0.5 ن )

- مبيانيا الدالة $g$ متصلة على المجال $[2,2;2,3]$
- من خلال الجدول $g(2,2)\times g(2,3)=-0,02\times 0,12<0$
- إذن حسب مبرهنة المتوسط يوجد $\alpha$ من المجال $]2,2;2,3[$ حيث $g(\alpha)=0$

خلاصة : المعادلة $(E)$ تقبل حلا $\alpha$ حيث : $2,2<\alpha<2,3$

### 02. ..

أ- نتحقق من أن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل $x$ من $D_f$ . ..... ( 0.25 ن )

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}-x=\dfrac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

خلاصة : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل $x$ من $D_f$.

ب- نبين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و $\alpha$ . ..... ( 0.5 ن )

ندرس تقاطع المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و لهذا نحل المعادلة : $f(x)=x$ : $x\in D_f$

أو أيضا : $f(x)-x=0$ : $x\in D_f$ وهذا يكافئ $\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}=0$ : $x\in D_f$ أي $g(x)=0$ , $x\in D_f$

مبيانيا هناك حلين و حسب ما سبق $g(\alpha)=0$ و لدينا $g(1)=0$ ( بالحساب أو مبيانيا )

خلاصة : المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و $\alpha$

ج- نحدد انطلاقا من $(\mathcal{C}_g)$ ؛ إشارة الدالة $g$ على المجال $[1;\alpha]$ و نبين أن $f(x)-x\le 0$ لكل $x$ من $[1;\alpha]$ ..... ( 0.5 ن )

- إشارة الدالة $g$ على المجال $[1;\alpha]$

على المجال $]1;\alpha[$ $g(x)<0$ بالنسبة ل $g(1)=0$ و $g(\alpha)=0$ و بصفة عامة على المجال $[1;\alpha]$ $g(x)\le 0$

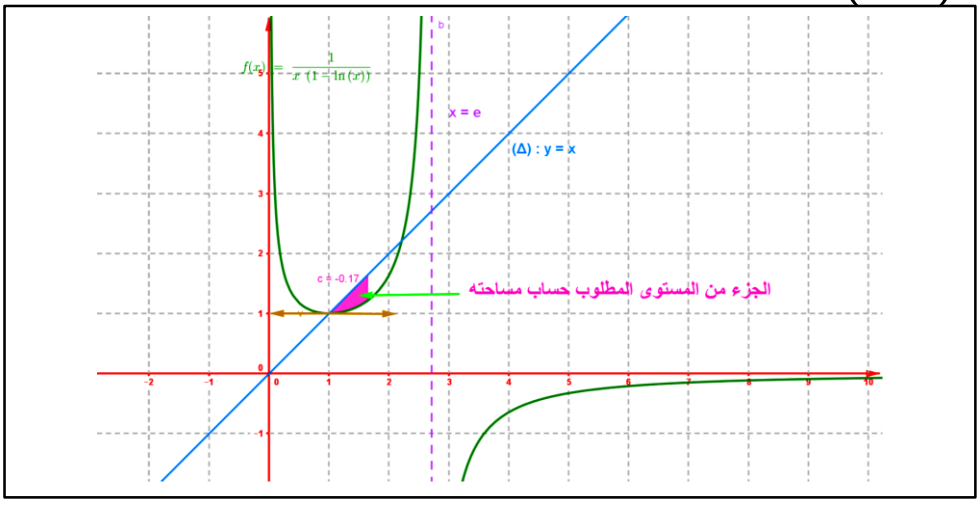
- نبين أن $f(x)-x\le 0$ لكل $x$ من $[1;\alpha]$ .

على المجال $[1;\alpha]$ : $g(x)\le 0$ و $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}\ge 1>0$ حسب جدول تغيرات $f$ على المجال $[1;e[$ و

$[1;\alpha]\subset[1;e[$ و منه : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}\le 0$ لكل $x$ من $D_f$.

خلاصة : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}\le 0$ لكل $x$ من $D_f$.

03. ننشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ . ..... ( 1.25 ن )



**04..**

أ- نبين أن : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ ( لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من $D_f$ . ..... ( 0.75 ن )

لدينا : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)}dx = [1-\ln x]_1^{\sqrt{e}} = \ln 2$ .

خلاصة : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$

ب- نحسب ، ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ . ..... ( 0.75 ن )

المساحة A هي : $A = 4\times\int_1^{\sqrt{e}} (x-f(x))dx = -4\times\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x(1-\ln x)} - x\right)dx = -4\left[\ln(|1-\ln x|) - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= -4\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\times e + \frac{1}{2}\right) = 4\ln 2 + 2e\ cm^2$

**III. ...**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ .

**01.** نبين بالترجع أن : $1 \le u_n \le \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ . ..... ( 0.5 ن )

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $1 \le u_0 = 2 \le \alpha$ ( مع $2,2 < \alpha < 2,3$ )

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n : أي $1 \le u_n \le \alpha$ .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ : أي نبين أن : $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

حسب معطيات الترجع لدينا : ( لأن f تزايدية على $[1;\alpha]$ )

$1 \le u_n \le \alpha \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(\alpha)$

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le \alpha$ ; $(f(\alpha) - \alpha = 0)$

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$

خلاصة : $1 \le u_n \le \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ .

**02.** بين أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية ( يمكن استعمال نتيجة السؤال II ) 2 ) ج - ) ..... ( 0.5 ن )

نبين أن : $u_{n+1} - u_n \le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$ .

نضع $x = u_n$ و نعلم أن $1 \le u_n \le \alpha$ إذن $1 \le x \le \alpha$ و لدينا : $f(x) - x \le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$

من جهة أخرى :

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$= f(x) - x \le 0$

و منه : $u_{n+1} - u_n \le 0$

خلاصة : المتتالية $(u_n)$ تناقصية .

**03.** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها . .....( 0.75 ن )

- لدينا المتتالية $(u_n)$ تناقصية و مصغورة لأن $1 \le u_n \le \alpha$ و منه : المتتالية $(u_n)$ متقاربة حسب خاصية .
- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و الدالة $f$ متصلة على $I = [1;\alpha]$ و $f(I) \subset I = [1;\alpha]$ و : المتتالية $(u_n)$ متقاربة إذن نهايتها $\ell$ هي حل للمعادلة $f(x) = x$ ; $x \in [1;\alpha]$
- أي $f(x) - x = 0$ ; $x \in [1;\alpha]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و $\alpha$ و بما أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية إذن $u_0 \ge u_1 \ge u_2 ..... \ge u_n$ و منه $u_0 = 2 \ge u_n$ و منه $u_n \le 2$ الحل هو $\ell = 1$ و ليس $\alpha$ لأن $2,2 < \alpha < 2,3$
- خلاصة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

## 02. باك 2014 الدورة العادية

**I.** لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $D = ]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$ .

**01.** نبين أن : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة $g$ تزايدية على $]0;+\infty[$ . ( 0.5 ن )

- لدينا الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ( مجموع دوال قابلة للاشتقاق ) : $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

  ومنه : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ .
- لدينا : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0$ لأن $x$ من $]0;+\infty[$ ومنه الدالة $g$ تزايدية على $]0;+\infty[$ .

**02.** تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \le 0$ لكل $x$ من $]0;1]$ و $g(x) \ge 0$ لكل $x$ من $[1;+\infty[$ . ( 0.75 ن )

- $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ و منه : $g(1) = 0$ .
- لدينا لكل $x$ من $]0;1]$ إذن $x \le 1$ بما أن $g$ تزايدية إذن $g(x) \le g(1)$ أي $g(x) \le 0$ .
- لدينا لكل $x$ من $[1;+\infty[$ إذن $x \ge 1$ بما أن $g$ تزايدية إذن $g(x) \ge g(1)$ أي $g(x) \ge 0$ .

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x) = (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$ . ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** نبين أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة . ( 0.5 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ .
- تأويل الهندسي للنتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$ .

**02.** أ- نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ . ( 0.25 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x)\right)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ .

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب – نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}=0$ ( يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$ ) ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ . ( 1 ن )

- نضع $t=\sqrt{x}$ ومنه $t^2=x$ و $x\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$ و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(t^2)\right)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln(t)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln(t)}{t}\right)^2=0$$

لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$ .

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}=0$

- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2+\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}+\frac{1}{x^3}=0+0=0$

ج – نحدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ . ( 0.25 ن )

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ إذن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

**03.** أ- نبين أن : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$. ( 1.5 ن )

- نبين أن : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ .

لدينا :

$$f'(x)=\left(\left(1+\ln(x)\right)^2+\frac{1}{x^2}\right)'=2\left(1+\ln(x)\right)'\left(1+\ln(x)\right)-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln(x)\right)-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2g(x)}{x}$$

خلاصة : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ .

- نستنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

إشارة $f'$ هي إشارة g حسب ما سبق السؤال 2 لدينا : $g(x)\le 0$ لكل x من $]0;1]$ و $g(x)\ge 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ و منه f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

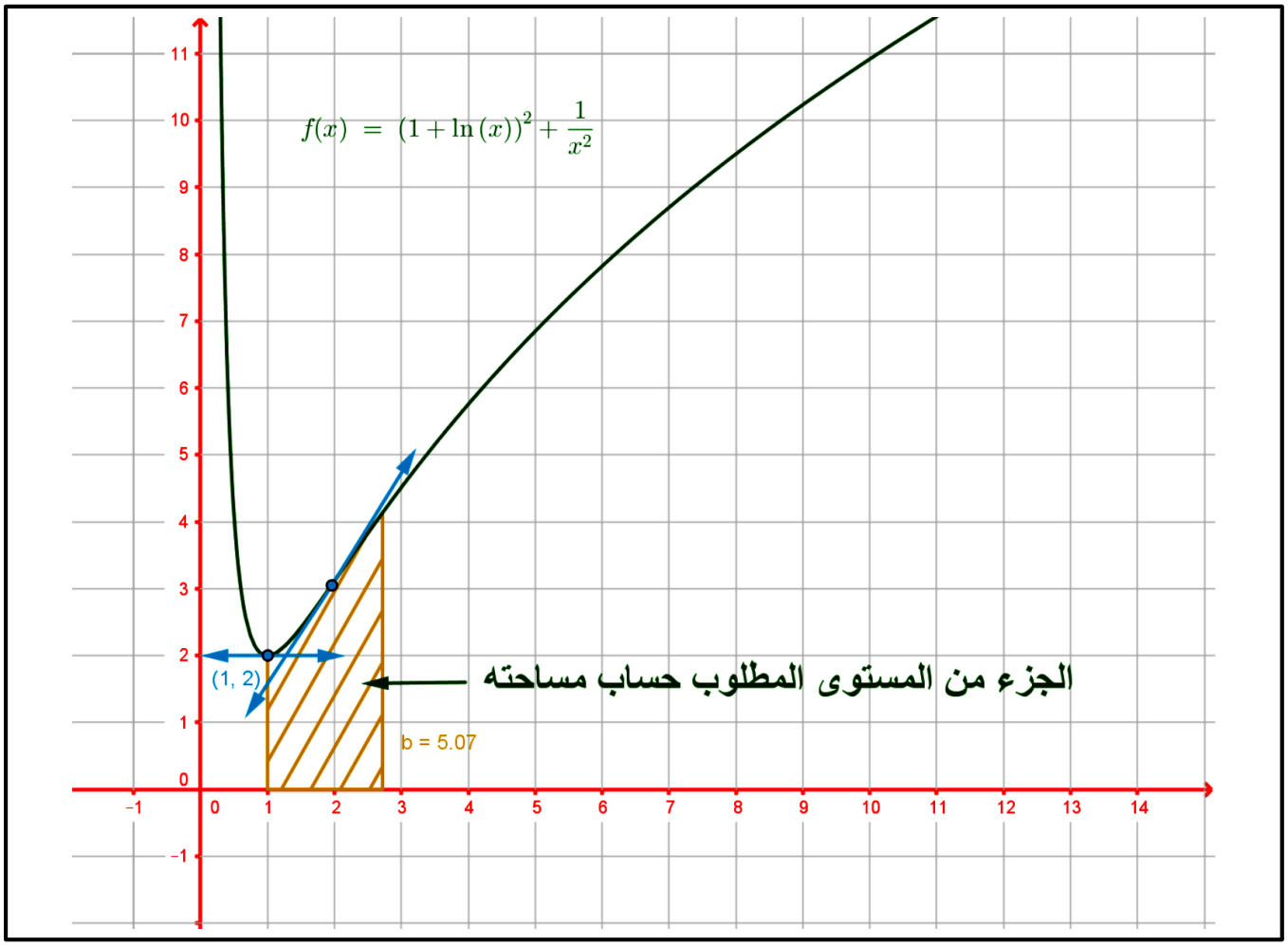
خلاصة : f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

ب- نضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ . ( 1 ن )

- جدول تغيرات الدالة f

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | ‖ | - | 0 | + | |
| f | ‖ | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

**04.** أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب ) . ( 0.75 ن )




**05.** نعتبر التكاملين I و J التاليين $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx$ و $J=\int_1^e (1+\ln(x))^2 dx$ .

أ – نبين أن : $H : x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$ . ( 0.5 ن )

- لدينا : $H'(x)=(x\ln(x))'=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=1+\ln x$

إذن : $H : x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$

- لدينا: $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx=\left[H(x)\right]_1^e=\left[x\ln(x)\right]_1^e=e\ln e-1\times\ln 1=e$ ومنه : $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx=e$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء نبين أن : $J=2e-1$ . ( 0.5 ن )

نضع :

$$u(x)=(1+\ln(x))^2 \qquad u'(x)=2\times\frac{1}{x}\times(1+\ln(x))$$
$$v'(x)=1 \qquad v(x)=x$$

$$J=\int_1^e(1+\ln(x))^2\,dx$$
$$=\left[x(1+\ln(x))^2\right]_1^e-\int_1^e \cancel{x}\times 2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times(1+\ln(x))dx$$

ومنه :

$$=e(1+1)^2-1(1+0)^2-2I$$
$$=4e-1-2e$$
$$=2e-1$$

خلاصة : $J=2e-1$

ج – نحسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ . ( 0.5 ن )

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e\left((1+\ln(x))^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\int_1^e(1+\ln(x))^2dx+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$$
$$=2e-1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=2e-1-\left(\frac{1}{e}-1\right)=2e-\frac{1}{e}$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي : $\mathscr{A}=2e-\frac{1}{e}\ (u.a)$ ( معبر عنها بوحدة المساحة )

## .03 باك 2013 الدورة الاستدراكية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-x-\ln(x)$ .

01. أ – نتحقق أن : $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$ . ( 0.25 ن )

لدينا : $(2x+1)(x-1)=2x^2-2x+x-1=2x^2-x-1$ .

خلاصة : $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$

ب - نبين أن $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$ .(ن1)

- لدينا : $g'(x)=\left(x^2-x-\ln(x)\right)'=2x-1-\frac{1}{x}=2x^2-x-1$ و منه : $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$

- $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $2x+1$ موجبة على $]0;+\infty[$

ومنه : $x-1$ سالبة على $]0;1]$ إذن الدالة $g$ تناقصية على $]0;1]$ ؛ $x-1$ موجبة على $[1;+\infty[$ إذن الدالة $g$ تزايدية على $[1;+\infty[$ .

خلاصة : $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و الدالة $g$ تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$ .

**02.** بين أن : $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ ( لاحظ أن $g(1)=0$ ) . ( 0.5 ن )

بما أن : الدالة $g$ تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$ إذن الدالة $g$ تقبل قيم دنيا في النقطة التي أفصولها $x_0=1$ و منه لكل $x$ من $]0;+\infty[$ فإن $g(x)\geq g(0)$ أي $g(x)\geq 0$ لأن $g(1)=0$ ومنه : $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ ( يمكنك وضع جدول تغيرات الدالة $g$ )

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2$ .و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 1 cm ) .

**01.** أ - نبين أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة . ( 0.5 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ و منه : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2=-\infty$ .

- نؤول هندسيا النتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$ .

ب - نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ .( لاحظ أن $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$ ) . ( 0.5 ن )

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)-1=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ .

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)}{x}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$ .

ج – استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحيد اتجاهه . ( 0.25 ن )

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ .

**02.** أ- نبين أن : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ . ( 1 ن )

لدينا : $f'(x)=\left(x^2-1-(\ln(x))^2\right)'=2x-2(\ln x)'\ln x=2x-2\times\frac{1}{x}\times\ln x=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$

خلاصة : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ .

ب- نتحقق أن : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و استنتج أن $f$ تزايدية على $]0;+\infty[$ . ( 0.75 ن )

- لدينا : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-x-\ln(x)}{x}+1=\frac{x^2-\cancel{x}-\ln(x)+\cancel{x}}{x}=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$ ومنه : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$
- ومنه نستنتج أن : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)=2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)\geq 0$ ( لأن $g(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و بالتالي $f$ تزايدية على $]0;+\infty[$ .

خلاصة : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و $f$ تزايدية على $]0;+\infty[$ .

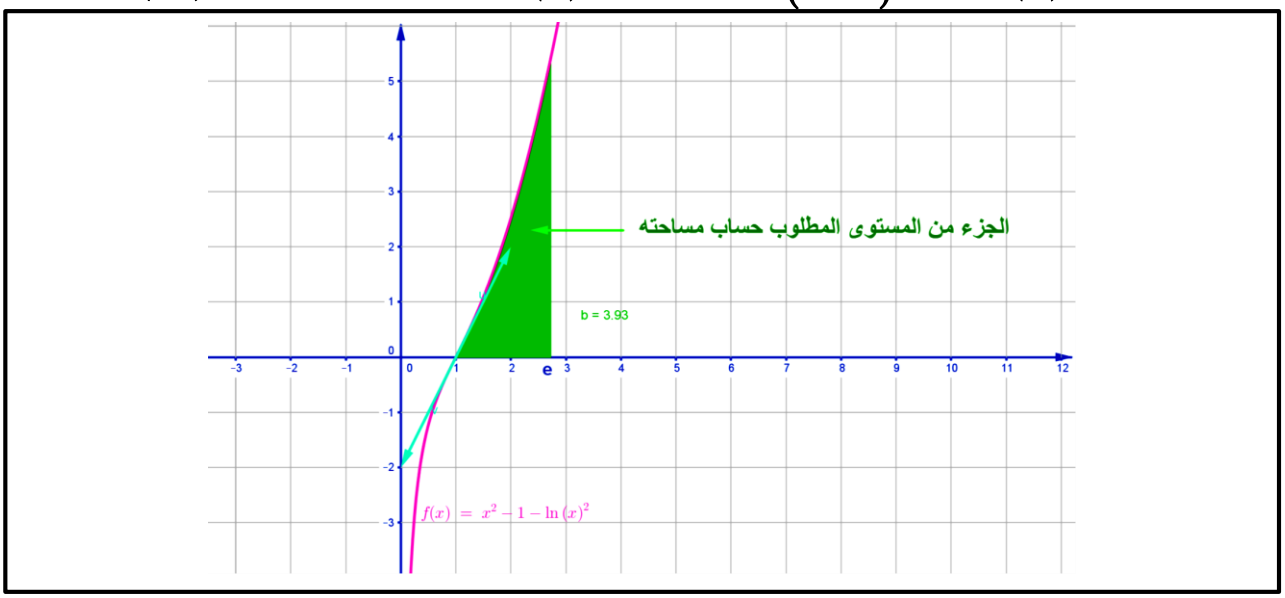
**03.** أ- نبين أن : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ المماس للمنحى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$ . ( 0.5 ن )

- معادلة المماس في النقطة $A(1;0)$ هي :

$$y=(x-1)f'(1)+f(1)=(x-1)\times 2+0=2x-2$$

خلاصة : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ المماس للمنحى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$ .

ب- ننشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي $A(1;0)$ ) . . ( 1 ن )




**04.** أ - لنتحقق أن الدالة $x\to x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم بين أن :

$$I=\int_1^e \ln(x)dx=1$$ . ( 0.75 ن )

- لدينا : الدالة $x\to x(\ln(x)-1)$ قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ مع دالتها المشتقة هي :

$$\left(x\left(\ln(x)-1\right)\right)'=1\times\left(\ln(x)-1\right)+x\left(\ln(x)-1\right)'=\ln x-1+\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}=\ln x$$

خلاصة : الدالة $x\to x\left(\ln(x)-1\right)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

- لدينا : $I=\int_1^e\ln(x)dx=\left[x\left(\ln(x)-1\right)\right]_1^e=e(1-1)-1-1\times(0-1)+1=1$ .

خلاصة : $I=\int_1^e\ln(x)dx=1$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=e-2$ . ( 0.5 ن )

نضع :

$$u(x)=\left(\ln(x)\right)^2 \qquad u'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$$
$$v'(x)=1 \qquad v(x)=x$$

ومنه :

$$\begin{aligned}J&=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx\\&=\left[x\left(\ln(x)\right)^2\right]_1^e-\int_1^e\cancel{x}\times2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\ln x dx\\&=e(1)^2-1(0)^2-2I\\&=e-2\\&=e-2\end{aligned}$$

خلاصة : $J=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=e-2$

ج – نبين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)\ cm^2$ . ( 0.5 ن )

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e\left(x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2\right)dx=\int_1^e\left(x^2-1\right)dx-\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^e-e+2 \qquad ; \qquad \left(\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=J=e-2\right)$$

$$=\left(\frac{e^3}{3}-e-\frac{1}{3}+1\right)-e+2$$

$$=\frac{e^3}{3}-2e+\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي : $\mathscr{A}=\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)\ cm^2$ ( معبر عنها بوحدة المساحة هي $cm^2$ )